庄圻泰 张南岳

复变函数

北京大学出版社

复 变 函 数

庄圻泰　张南岳

北 京 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书包括复数、复变函数、Cauchy定理与Cauchy公式、解析函数的级数展开、留数定理及其应用、整函数与亚纯函数、解析开拓和共形映照等。内容精炼，叙述简明扼要。对于多值函数、积分计算、共形映照等内容作了较好的处理。各节配有足够数量的习题。

本书可作为综合大学和高等师范院校数学系及有关专业的教科书或教学参考书。

复 变 函 数

北京大学出版社出版
（北京大学校内）
新华书店北京发行所发行
1 2 0 2 工厂印刷
850×1168毫米 32开本 11.5印张 280千字
1984年4月第一版 1984年4月第一次印刷
印数：1—35,000册

统一书号：13209·73 定价：1.55元

序　言

复变函数论发展到今天已成为一个内容非常丰富、应用极为广泛的数学分支。作为大学必修课程的复变函数主要讲述解析函数的基本理论和有关方法，通常它包括以下三方面内容：Cauchy积分理论、Weierstrass级数理论和Riemann共形映照理论。

本书是以我们在北京大学数学系多年讲授复变函数课程的讲义为基础改写成的。力图做到取材精炼、安排紧凑、简明扼要地叙述解析函数的基本内容。这门课程的研究对象除单值解析函数外，还不可避免地要涉及到初等多值函数，而这往往是教师难以讲授、学生难以掌握的一部分内容。为此我们着重在第二章第三节分析产生多值性的原因，说明如何找出支点以及在什么样的域内多值函数可以分出单值解析分支，在什么样的域内则不能，并列举了若干例子。几年来的教学实践表明，这样做的效果是良好的。留数定理的一个重要应用是计算积分，书中对常见的积分计算作了比较系统的分类，使学生学完这部分内容后有所遵循。共形映照是解决实际问题的一个有力工具，书中专门安排了一节（第八章第三节）列举若干共形映照的实例，目的在于使学生能应用初等函数实现常见图形的共形映照。

选做一定数量的习题是掌握基本理论与方法的重要环节，本书除第八章第一节外，每节都配有足够数量的习题，少数较难的习题都有提示。

书中的缺点和错误在所难免，希望大家批评指正。

庄圻泰　张南岳

1982年11月于北京大学

目　录

第一章　复　　数

在中学代数课程里，由解一元二次方程引进了复数的概念，并且阐明了它的若干基本性质．在这里，为了今后的方便，我们来叙述有关复数的一些内容．

§1　复数的几何表示

大家知道，所谓复数，即形如$z=x+iy$的数，其中i是纯虚数单位$\sqrt{-1}$，x与y都是实数，分别称为复数z的实部和虚部，记作$\mathrm{Re}z$和$\mathrm{Im}z$．

在平面上取正交坐标系Oxy.我们用坐标为(x,y)的点P表示复数$z=x+iy$．这样复数就与平面上的点一一对应．实数与x轴上的点一一对应，x轴称为实轴；虚数iy与y轴上的点一一对应，y轴称为虚轴．与复数建立了这种对应关系的平面就称为复平面．今后，复数与复平面上的点就不再区别了．全体复数或复平面记作$\mathbf{C}$．

有时我们也用向量$\overrightarrow{OP}$来表示复数$z=x+iy$，x与y分别是$\overrightarrow{OP}$在x轴和y轴上的投影．$\overrightarrow{OP}$的长度r称为复数z的模，记作$|z|$．显然（图1-1）

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}\,. \qquad (1)$$

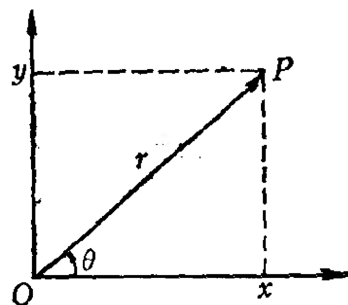


图　1-1

容易看出

$$|\mathrm{Re}z|\leqslant|z|,\quad |\mathrm{Im}z|\leqslant|z|, \qquad (2)$$
$$|z|\leqslant|\mathrm{Re}z|+|\mathrm{Im}z|.$$

假如P点不是原点（即$z\neq0$），则称

向量 $\overrightarrow{OP}$ 与x轴正向之间的夹角 θ 为 z 的幅角，记作 $\mathrm{Arg}\,z$. 幅角的方向规定为：反时针方向为正，顺时针方向为负. 显然，一个复数有无穷多个幅角. 若θ_1是复数z的一个幅角，那么

$$\theta=\theta_1+2k\pi \qquad (k\text{是整数})$$

就给出了复数 z 的全部幅角. 在复数 z 的幅角中，有一个θ_0满足 $0\leqslant\theta_0<2\pi$，θ_0称为复数z的主要幅角，或幅角的主值，记作$\arg z$. 注意，有时为了方便起见，也取其他的主值范围，如 $-\pi\leqslant\theta_0<\pi$. 但是不管$\arg z$的范围如何取，总有

$$\mathrm{Arg}\,z=\arg z+2k\pi \qquad (k\text{是整数}).$$

在平面上只有原点(即复数$z=0$)的幅角是不定的.

如果取Ox为极坐标系的极轴，那么，复数z 的模和幅角分别是向量 $\overrightarrow{OP}$ 的极径和极角. 由直角坐标系与极坐标系的关系，我们有

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta, \end{cases} \tag{3}$$

其中r,θ分别是复数 z 的模和幅角. 所以

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta). \tag{4}$$

(4)式称为复数 z 的三角形式.

(3)式表明可以用 z 的模和幅角来表示 z 的实部和虚部，反之亦然.

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

$$\arg z=\begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & z\text{在第Ⅰ象限;} \\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & z\text{在第Ⅱ，Ⅲ象限;} \\ \arctan\dfrac{y}{x}+2\pi, & z\text{在第Ⅳ象限.} \end{cases} \tag{5}$$

这里$0\leqslant\arg z<2\pi$。

复数$x-iy$称为复数$z=x+iy$的共轭复数，记作$\bar{z}$. 显然，z和$\bar{z}$关于实轴是对称的(图1-2). 根据定义，容易验证

$$|\bar{z}|=|z|, \qquad (6)$$

$$\operatorname{Arg}\bar{z}=-\operatorname{Arg}z, \qquad (7)$$

$$\overline{(\bar{z})}=z. \qquad (8)$$

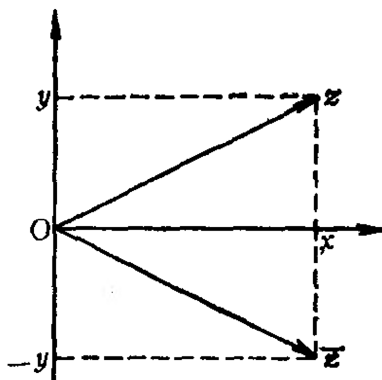


图 1-2

注意，(7)式的意义是：对于$\operatorname{Arg}\bar{z}$中的任意一个值，必有$\operatorname{Arg}z$中的一个值，使得它们仅相差一个符号，反之亦然.

习　　题

1. 求下列复数的模和幅角的主值

$$1+i,\ i,\ 2-3i,\ -1+i,\ -5+12i.$$

2. 证明

$$\sqrt{\frac{1}{2}}(\operatorname{Re}z+\operatorname{Im}z)\leqslant|z|\leqslant|\operatorname{Re}z|+|\operatorname{Im}z|.$$

§2　复数的运算

在定义运算之前，我们首先注意两个复数$z_1=x_1+iy_1$与$z_2=x_2+iy_2$是无大小可言的. 我们称z_1，z_2是相等的，$z_1=z_2$，如果$x_1=x_2, y_1=y_2$.

复数的加法和减法定义如下：

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2),$$

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).$$

若用$\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}$分别表示复数$z_1, z_2$对应的向量，则复数的加减法与向量的加减法一致. 因此按平行四边形法则，向量$\overrightarrow{OP}$表

示复数z_1+z_2（图1-3）．一般地，若有 n 个复数$z_k=x_k+iy_k$（$k=1,2,\cdots,n$），它们对应的向量是$\overrightarrow{OP_k}$（$k=1,2,\cdots,n$），那么

$$z_1+z_2+\cdots+z_n=(x_1+x_2+\cdots+x_n)+i(y_1+y_2+\cdots+y_n)$$

对应的向量（图1-4）是

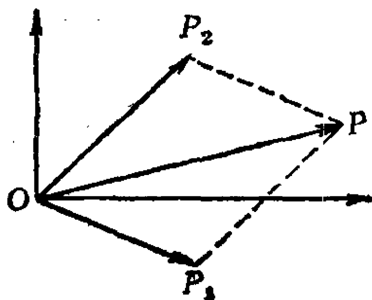


图 1-3

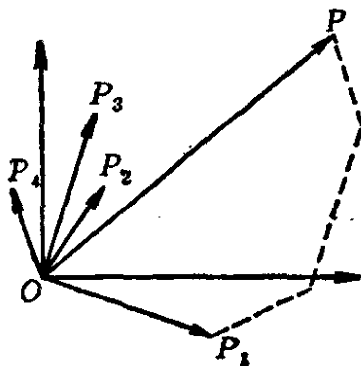


图 1-4

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\cdots+\overrightarrow{OP_n}.$$

由于 $\overrightarrow{P_2P_1}+\overrightarrow{OP_2}=\overrightarrow{OP_1}$（图1-5），所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_2P_1}&=\overrightarrow{OP_1}-\overrightarrow{OP_2}\\&=(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)\\&=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2),\end{aligned}$$

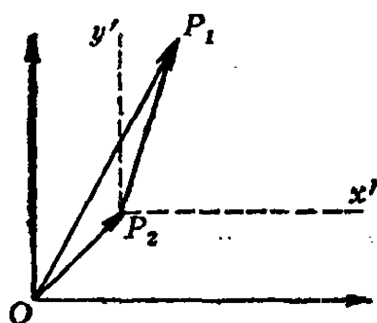


图 1-5

即向量$\overrightarrow{P_2P_1}$表示复数z_1-z_2．$\overrightarrow{P_2P_1}$的长为$|z_1-z_2|$，也就是复平面上点z_1，z_2之间的距离．如果过 P_2 作P_2x'，P_2y'分别与Ox轴和Oy轴平行，那么$\overrightarrow{P_2P_1}$与P_2x'之间的夹角就是z_1-z_2的幅角．

在定义乘法时，如同对实数作乘法一样，我们只要注意$i^2=-1$，即

$$\begin{aligned}z_1z_2&=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)\\&=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).\end{aligned}$$

按照定义，

$$z\bar{z}=|z|^2. \qquad (9)$$

我们假设 $z_1=x_1+iy_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=x_2+iy_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，于是

$$
\begin{aligned}
z_1z_2&=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\
&=r_1r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)\\
&\quad+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_2\cos\theta_1)\}\\
&=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}.
\end{aligned}
$$

因此得到

$$|z_1z_2|=|z_1|\,|z_2|. \qquad (10)$$

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2. \qquad (11)$$

这表明：乘积的模等于模的乘积，乘积的幅角等于幅角的和．根据这一结果，我们可以给乘法一个几何解释．在 Ox 轴上取单位线段 OI，在线段 Oz_2 上作 $\triangle Oz_2P$ 和 $\triangle OIz_1$ 相似，那么 P 点就表示乘积 z_1z_2（图1-6）．

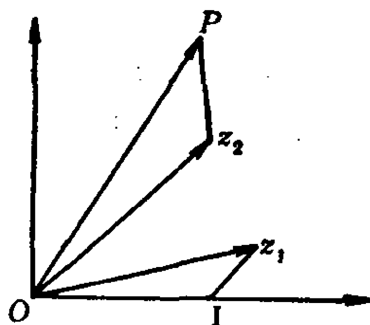


图 1-6

设 $z_k=r_k(\cos\theta_k+i\sin\theta_k)$ $(k=1,2,\cdots,n)$．应用归纳法得到

$$
\begin{aligned}
z_1z_2\cdots z_n=r_1r_2\cdots r_n\{&\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)\\
&+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)\},
\end{aligned}
$$

即 $r_1r_2\cdots r_n$ 和 $\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n$ 分别是 $z_1z_2\cdots z_n$ 的模和幅角．特别地，有

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta. \qquad (12)$$

上式称为de Moivre公式．

假设 $z_1\neq0$．由(9)式知，$\dfrac{1}{z}=\dfrac{\bar z}{|z|^2}$．我们定义除法 $\dfrac{z_2}{z_1}$ 为 $\dfrac{1}{z_1}\cdot z_2$．由(10)式得到

$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right|=\left|\frac{1}{z_1}\right|\,|z_2|=\frac{|\bar z_1|}{|z_1|^2}|z_2|.$$

再由(6)式得到

$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|}. \tag{13}$$

由(11)式得到

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \operatorname{Arg} z_2 + \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z_1}\right) = \operatorname{Arg}\ z_2 + \operatorname{Arg}\bar{z}_1.$$

所以再由(7)式得到

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \operatorname{Arg} z_2 - \operatorname{Arg} z_1. \tag{14}$$

为了说明除法的几何意义，只需说明运算 $w=1/z$ 的几何意义．为此，我们把这个运算分解为

$$z' = \frac{1}{\bar{z}}, \qquad w = \bar{z}'.$$

如果$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，那么

$$z' = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{r}(\cos\theta + i\sin\theta).$$

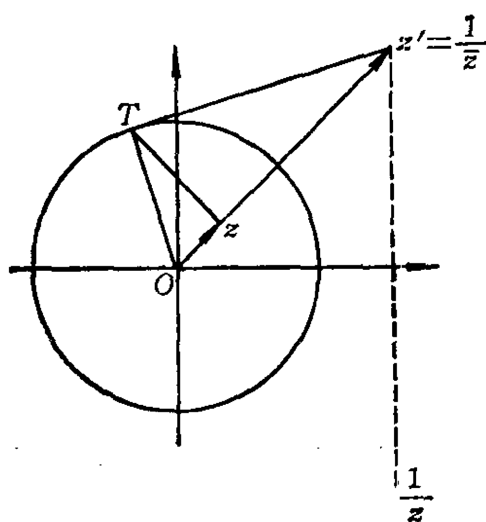


图 1-7

这表明θ也是z'的一个幅角，z'和z的模的乘积为1．因此，若$|z|<1$，过z点作射线Oz的垂线，交单位圆周于T，过T作单位圆周的切线，这条切线与Oz的交点就是z'．事实上，由直角三角形$\triangle OzT$和$\triangle OTz'$相似(图1-7) 就得到

$$|z||z'|=1, \quad \arg z' = \arg z.$$

若$|z|>1$，情形是类似的，只需先作切线再作垂线．当$|z|=1$时，$z'=z$，两点重合．

从z到z'称为关于单位圆周的对称变换．至于$w=\bar{z}'$，显然是关于实轴与z'对称．因此$w=1/z$是关于单位圆周的对称变换与

关于实轴对称的复合.

例 1 求复数$z=1+\cos\theta+i\sin\theta$ $(-\pi\leqslant\theta<\pi)$的三角形式.

$$|z|=\sqrt{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}=2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|=2\cos\frac{\theta}{2}.$$

$$\arg z=\arctan\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{\theta}{2}.$$

所以（图1-8）

$$z=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right).$$

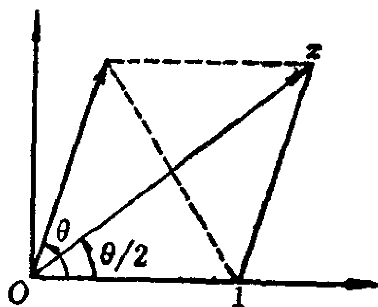


图 1-8

例 2 通过计算$(5-i)^4(1+i)$，证明 Machin公式

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}.$$

$$(5-i)^4(1+i)=(24-10i)^2(1+i)=(476-480i)(1+i)$$
$$=4(239-i).$$

若取$-\pi\leqslant\arg z<\pi$，那么

$$\arg(5-i)^4=-4\arctan\frac{1}{5},\qquad \arg(1+i)=\frac{\pi}{4},$$

$$\arg(239-i)=-\arctan\frac{1}{239}.$$

所以，由(11)式得到

$$\frac{\pi}{4}-4\arctan\frac{1}{5}=-\arctan\frac{1}{239},$$

即

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}.$$

习　题

1. 验证$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$，$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

2. 将下列复数表为$a+bi$的形式：

$$\frac{1}{i},\ i^n,\ \frac{1-i}{1+i},(1+i\sqrt{3})^3,(1+i)^n+(1-i)^n,$$

其中 n 是正整数.

3. 设$z=\cos\theta+i\sin\theta\neq 1$，求$\frac{1+z}{1-z}$.

4. 设$|z|=r>0$，证明$\mathrm{Re}z=\frac{1}{2}\left(z+\frac{r^2}{z}\right)$，$\mathrm{Im}z=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{r^2}{z}\right)$.

5. 证明：若$z=x+iy$不是负实数，则存在唯一的ζ，$\mathrm{Re}\zeta>0$，使得$\zeta^2=z$.

6. 证明：以复数α，β，γ为顶点的三角形（由α到β再到γ是反时针方向），其面积为

$$\frac{1}{2}|\gamma-\beta|^2\,\mathrm{Im}\left(\frac{\alpha-\gamma}{\gamma-\beta}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\bar{\alpha}\beta+\bar{\beta}\gamma+\bar{\gamma}\alpha).$$

7. 求复数$z_0\neq 0$关于直线（1）$x-y=0$；（2）$x+y=0$的对称点.

8. 求：（1）$1+\cos\theta+\cos2\theta+\cdots+\cos n\theta$；

（2）$\sin\theta+\sin2\theta+\cdots+\sin n\theta$.

9. （1）若$z=\cos\theta+i\sin\theta\neq 0$，则$\frac{1}{z}=\cos\theta-i\sin\theta$；

（2）若$z\neq 0$，定义$z^{-n}=1/z^n$. 证明de Moivre公式对于所有的整数 n 成立.

10. 证明 $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\ (|z_1|^2+|z_2|^2)$，并说明其几何意义.

11. 证明：(1) $|1+z_1\bar{z}_2|^2+|z_1-z_2|^2=(1+|z_2|^2)(1+|z_1|^2)$；

（2）$|1-\bar{z}_1 z_2|^2-|z_1-z_2|^2=(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)$；

(3) $|z_1(1+|z_2|^2)-z_2(1+|z_1|^2)|^2=|z_1-z_2|^2|1-z_1\bar{z}_2|^2-(z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2)^2$.

12．证明当$|z_1|=1$或$|z_2|=1$之一成立时，$\left|\dfrac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1z_2}\right|=1$.若$|z_1|=|z_2|=1$，上式在什么条件下成立？

13．证明复数α,β,γ共线的充要条件是

$$\begin{vmatrix}\alpha & \bar{\alpha} & 1\\ \beta & \bar{\beta} & 1\\ \gamma & \bar{\gamma} & 1\end{vmatrix}=0.$$

14．证明：以z_1,z_2,z_3为顶点的三角形与以w_1,w_2,w_3为顶点的三角形相似，其充要条件是

$$\begin{vmatrix}z_1 & w_1 & 1\\ z_2 & w_2 & 1\\ z_3 & w_3 & 1\end{vmatrix}=0.$$

15．证明圆周的方程是$z\bar{z}+\beta\bar{z}+\bar{\beta}z+c=0$，其中$c$是实常数，$|\beta|^2-c>0$．求其圆心和半径．

16．求过不共线三点z_1,z_2,z_3的圆周的方程．

17．设$z_1\neq 0,1$，且$0,z_1,z_2$三点不共线，证明:过点$z_1,z_2,1/\bar{z}_1$的圆周的圆心和半径分别为

$$\frac{z_1(1+|z_2|^2)-z_2(1+|z_1|^2)}{z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2},\qquad \frac{|z_1-z_2||1-\bar{z}_1z_2|}{|z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2|},$$

且点$1/\bar{z}_2$位于这个圆周上．

18．若$|z_1|=\lambda|z_2|$，$\lambda>0$，则 $|z_1-\lambda^2z_2|=\lambda|z_1-z_2|$.

19．设$z_1\neq z_2$，λ是不为1的正实数，证明$\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right|=\lambda$是一圆周，并求其圆心和半径．

20．设点z在图1-9所示的角内$\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$,且$|z-1|<\cos\alpha$.

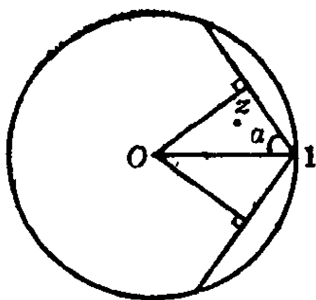


图 1-9

证明$\frac{|1-z|}{1-|z|}\leqslant\frac{2}{\cos\alpha}$.

21. 证明$\sqrt[n]{z}$（复数z的n次方根）的n个值是正n边形的各顶点.

22. 设$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，且$z_1+z_2+z_3=0$，证明z_1，z_2,z_3是内接于单位圆周的三角形的顶点.

23. 证明：复数α,β,γ为一个正三角形顶点的充要条件是$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$.

24. 证明：复平面上三个不同点α,β,γ作成以γ为顶点的等腰三角形，当且仅当存在正实数k，使得

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\cdot\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}=k.$$

25. 设$|z_k|=1(k=1,2,3,4)$，证明z_k是矩形顶点的充要条件是$\sum_{k=1}^{4}z_k=0$.

26. 证明恒等式

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{n-1}{n}\pi=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

提示：考虑$(z+1)^n-1$不为零的$n-1$个根的乘积.

27. 利用de Moivre公式，证明：

(1) 当$0<\theta<\frac{\pi}{2}$时，

$$\sin(2m+1)\theta=\sin^{2m+1}\theta P_m(\cot^2\theta),$$

其中 $P_m(x)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^kC_{2m+1}^{2k+1}x^{m-k}$.

(2) $\sum_{k=1}^{m}\cot^2\frac{k\pi}{2m+1}=\frac{m(2m-1)}{3}$.

28．求下列关系式的几何意义：

(1) $\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right|\leqslant 1\ (z_1\neq z_2)$；(2) $\mathrm{Re}\dfrac{z-z_1}{z-z_2}=0\ (z_1\neq z_2)$；

(3) $\mathrm{Im}\dfrac{z-z_1}{z-z_2}=0\ (z_1\neq z_2)$；(4) $0<\arg\dfrac{z+i}{z-i}<\dfrac{\pi}{4}$；

(5) $0<\mathrm{Re}(iz)<1$；(6) $|z+c|+|z-c|\leqslant 2a$，$a>0$，$|c|<a$；

(7) $|z-2|-|z+2|>5$；(8) $|z|<1-\mathrm{Re}z$；

(9) $\mathrm{Re}\dfrac{z(z+i)}{z-i}>0$；(10) $|z^2-1|=\lambda\ (\lambda>0)$．

§3 三角不等式

根据初等几何中三角形两边之长的和不小于第三边的长，两边之长的差不大于第三边的长；以及复数加减法的定义，我们立即得到

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,\tag{15}$$

$$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1-z_2|.\tag{16}$$

这两个式子称为三角不等式．下面给出它们的分析证明．

由(9)式，有

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2&=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)\\&=|z_1|^2+|z_2|^2+(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2)\\&=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2).\end{aligned}$$

因为$\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)\leqslant|z_1\bar{z}_2|=|z_1||z_2|$，所以

$$|z_1+z_2|^2\leqslant|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|=(|z_1|+|z_2|)^2,$$

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.$$

(15)式得证．因为$|z_1|=|(z_1-z_2)+z_2|$，由(15)式得到

$$|z_1|\leqslant|z_1-z_2|+|z_2|,\quad |z_1|-|z_2|\leqslant|z_1-z_2|.$$

同理有$|z_2|-|z_1|\leqslant|z_1-z_2|$，所以

$$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1-z_2|.$$

(16)式得证.

从证明的过程中，我们看到，(15)式的等号成立的充要条件是$\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=|z_1||z_2|=|z_1\bar{z}_2|$.但是一个复数 z 的实部等于其模的充要条件是：z 为非负实数，即$z\geqslant0$. 因此(15)式成为等式，其充要条件是$z_1\bar{z}_2\geqslant0$，也就是

$$\frac{z_1}{z_2}|z_2|^2\geqslant0\ (若z_2\neq0),\quad \frac{z_1}{z_2}\geqslant0.$$

于是得到(15)式的等号成立的充要条件是z_1,z_2有相同的幅角.

例 3 设$z\neq0$，$-\pi\leqslant\arg z<\pi$，证明

$$|z-1|\leqslant||z|-1|+|z||\arg z|.$$

设$z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$，$-\pi\leqslant\theta<\pi$.

$$\begin{aligned}|z-1|&=|z-|z|+(|z|-1)|\leqslant|z-|z||+||z|-1|\\&=|z||(\cos\theta+i\sin\theta)-1|+||z|-1|\\&=|z|\sqrt{(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta}+||z|-1|\\&=|z|\left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|+||z|-1|\\&\leqslant|z||\theta|+||z|-1|.\end{aligned}$$

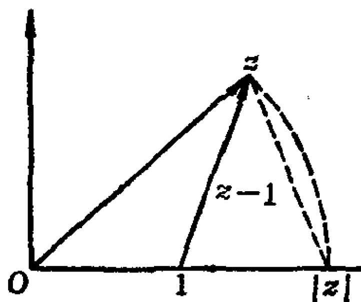


图 1-10

即得到(图1-10)

$$|z-1|\leqslant||z|-1|+|z||\arg z|.$$

习　题

1．证明$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$，并求出等号成立的条件.

2．证明 Lagrange 恒等式

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k\right|^2=\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^2\cdot\sum_{k=1}^{n}|\beta_k|^2-\sum_{1\leqslant k<j\leqslant n}|\alpha_k\bar{\beta}_j-\alpha_j\bar{\beta}_k|^2.$$

由此推出Cauchy不等式

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k\right|^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^2\cdot\sum_{k=1}^{n}|\beta_k|^2,$$

并且仅当α_k与β_k成比例时等号才成立.

3．若$|\alpha|<1$，$|\beta|<1$，则$\left|\dfrac{\alpha-\beta}{1-\bar{\alpha}\beta}\right|<1$.

4．若$|\alpha_k|<1$, $\lambda_k\geqslant0$ $(k=1,2,\cdots,n)$，且$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$，则$|\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_n\alpha_n|<1$.

5．若$|\alpha|<1$，$|\beta|<1$，则

$$\frac{|\alpha|-|\beta|}{1-|\alpha||\beta|}\leqslant\left|\frac{\alpha-\beta}{1-\bar{\alpha}\beta}\right|\leqslant\frac{|\alpha|+|\beta|}{1+|\alpha||\beta|}.$$

6．设$0<a_0\leqslant a_1\leqslant\cdots\leqslant a_n$，证明：当$|z|<1$时，

$$p_n(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n\neq0.$$

提示：考虑$(1-z)p_n(z)$.

§4　复数的球面表示与扩充复平面

考虑一个半径为1的球面S：

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1.$$

点(0,0,1)称为北极，记作N．同时Ox_1x_2平面是复平面**C**．复平面交球面S于赤道.

现在，对于**C**中的每一点z，它与N连接的直线只与S交于一点$Z\neq N$．若$|z|<1$，那么Z在下半球面上；若$|z|>1$，那么Z在上半球面上；若$|z|=1$，则$Z=z$.反之，球面上的任意一点$Z\neq N$，它与N连接的直线也只与**C**交于一点z（图1-11）．于是除了N

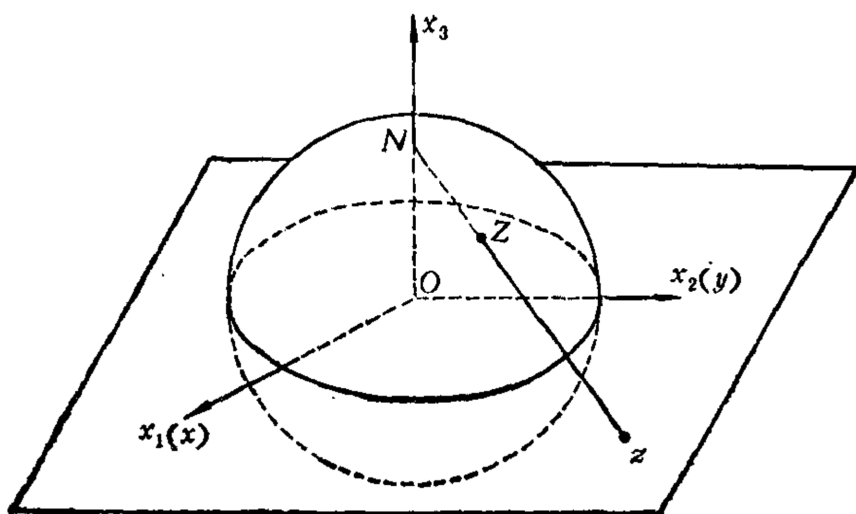


图 1-11

$(0,0,1)$外，复平面$\mathbf{C}$和球面S上的点都是一一对应的，并且当$|z|\to+\infty$时，Z趋于N. 因此，很自然，在复平面$\mathbf{C}$中引进一理想的点，作为与N对应的点，称为无穷远点，记作$z=\infty$. 加上无穷远点的复平面称为扩充复平面，记作$\mathbf{C}_\infty$，即$\mathbf{C}_\infty=\mathbf{C}\cup\{\infty\}$. 为区别起见，不包含无穷远点的复平面$\mathbf{C}$称为有穷复平面. $\mathbf{C}_\infty$与S上的点建立起来的这种一一对应称为球极射影. S称为(**Riemann**)复球面.

注意，对于无穷远点，其模是$+\infty$，而幅角是不定的. 在扩充复平面$\mathbf{C}_\infty$上，任一直线都是通过无穷远点∞的.

下面我们给出$\mathbf{C}_\infty$的球面表示式. 设$z=x+iy$，对应的$Z=(x_1,x_2,x_3)$，过点z和N的直线上的点是

$$tN+(1-t)z,\quad -\infty<t<+\infty.$$

即

$$((1-t)x,(1-t)y,t),\quad -\infty<t<+\infty.$$

于是与Z点对应的t满足

$$1=(1-t)^2x^2+(1-t)^2y^2+t^2=(1-t)^2|z|^2+t^2,$$

$$1-t^2=(1-t)^2|z|^2.$$

因为$t\neq1$ ($z\neq\infty$)，所以

$$t=\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1},\qquad 1-t=\frac{2}{|z|^2+1}.$$

最后得到Z点的坐标是

$$\begin{cases} x_1=(1-t)x=\dfrac{z+\bar{z}}{|z|^2+1}, \\ x_2=(1-t)y=\dfrac{z-\bar{z}}{i(|z|^2+1)}, \\ x_3=t=\dfrac{|z|^2-1}{|z|^2+1}. \end{cases} \tag{17}$$

反之，由Z的坐标(x_1,x_2,x_3)可以表示出它所对应的z

$$z=x+iy=\frac{x_1+ix_2}{1-x_3}. \tag{18}$$

习　题

1．求$-1+i$，$3-4i$的球面像．

2．证明：$z,1/\bar{z}$的球面像是关于Ox_1x_2平面的对称点．

3．证明：z，z'对应于球面上一直径的两端点的充要条件是：$z\bar{z}'=-1$．

4．证明：圆周$A|z|^2+Bz+\overline{B}\bar{z}+C=0$（$A$，$C$是实常数，$|B|^2>AC$）的球面像是$S$上的大圆周，当且仅当$A+C=0$．

5．证明：$|z-z_0|=R$是S上大圆周的球极射影，当且仅当$R^2=1+|z_0|^2$．

6．设$d(z,z')$表示与z,z'相应的Z,Z'之间的距离．证明

$$d(z,z')=\frac{2|z-z'|}{\sqrt{(|z|^2+1)(|z'|^2+1)}},\quad z,z'\in\mathbf{C},$$

$$d(z,\infty)=\frac{2}{\sqrt{|z|^2+1}},\quad z\in\mathbf{C}.$$

第二章　复变函数

在这一章里，首先给出有关复平面上点集的一些基本知识，这对今后的讨论是必要的．然后叙述解析函数的概念，最后讨论初等函数及其构成的映照．

§1　复平面上的点集

1．复数集

设有复数$a\in \mathbf{C}$，满足条件

$$|z-a|<\varepsilon \quad (\varepsilon>0)$$

的所有点z，称为a点的一个邻域，或a点的一个ε邻域，记作$V(a;\varepsilon)$．a点的ε邻域就是以a点为中心，ε为半径的圆的内部．

无穷远点$z=\infty$的邻域是指满足条件

$$|z|>R \quad (R\text{是常数})$$

的所有的点z，即以点$z=0$为中心，R为半径的圆的外部，记作$V(\infty;R)$．

设平面上给定一点集A，$a\in A$称为A的一个内点，如果存在$\varepsilon>0$，使得$V(a;\varepsilon)\subset A$．由集$A$的所有内点作成的集，称为$A$的内部，记作$A^\circ$，显然$A^\circ\subset A$．

集A称为开集，如果$A=A^\circ$，即A是由它的内点所组成．由三角不等式可知，每一点的邻域都是开集．

任一集A的内部A°总是开集．即$(A^\circ)^\circ=A^\circ$．事实上设z_0是A°的任意一点，按定义，存在一邻域$V(z_0;\varepsilon)\subset A$．设$z$是$V(z_0;\varepsilon)$中的任意点．因为邻域$V(z_0;\varepsilon)$是开集，所以存在邻域$V(z;\delta)\subset V(z_0;\varepsilon)\subset A$，故$z$是$A$的内点，$z\in A^\circ$．由于$z$是

$V(z_0;\varepsilon)$中的任意点，所以$V(z_0;\varepsilon)\subset A^\circ$，故$A^\circ$是开集．

点z_0称为集A的极限点或聚点，如果点z_0的任一邻域内有属于A的，且异于z_0的点．集A的极限点可以属于A，也可以不属于A．

由集A的所有极限点组成的集称为A的导出集，记作A'．属于A而不属于A'的点称为A的孤立点．

集A称为闭集，如果$A'\subset A$．有穷集是闭集，它的导出集是空集．空集记作Φ．

由所有不属于A的点组成的集称为A的余集，记为CA．

A 是闭集的充要条件是它的余集为开集．事实上，若A是闭集，那么任一点$z\in CA$都不是A的极限点．所以有一邻域$V(z;\varepsilon)$不含有A的点，即$V(z;\varepsilon)\subset CA$，故$CA$是开集．反之，若$CA$是开集，$z\in CA$，那么存在一邻域$V(z;\varepsilon)\subset CA$，所以$V(z;\varepsilon)$不包含$A$的点，$z$不是$A$的极限点，于是$A$的极限点一定不属于$CA$，而只能属于$A$，按定义$A$是闭集．

集$A\cup A'$称为集A的闭包，记作$\overline{A}$，即$\overline{A}=A\cup A'$．

对于集A有下列事实：

1）$z_0\in\overline{A}$的充要条件是：对于任一$\varepsilon>0$，

$$V(z_0;\varepsilon)\cap A\neq\Phi;$$

2）$C\overline{A}=(CA)^\circ$，$\overline{CA}=CA^\circ$；

3）$\overline{A}$是闭集．

事实上，1）若$z_0\in\overline{A}$，那么或者$z_0\in A$，或者$z_0\in A'$，在这两种情况下，对于任一$\varepsilon>0$，$V(z;\varepsilon)\cap A\neq\Phi$．反之，若点$z_0$的任一邻域和$A$的交非空，$z_0$或是$A$的孤立点，或是$A$的极限点，所以$z_0\in\overline{A}$．

2）$z\in C\overline{A}$，当且仅当存在一个邻域$V(z;\varepsilon)\cap A=\Phi$，亦即$V(z;\varepsilon)\subset CA$，也就是说$z\in(CA)^\circ$，所以$C\overline{A}=(CA)^\circ$．又$z\in CA^\circ$，当且仅当点$z$的每一个邻域都包含有不属于$A$而属于$CA$的点．也就是对于每个$\varepsilon>0$，$V(z;\varepsilon)\cap CA\neq\Phi$，由1），

$z\in\overline{CA}$，所以$CA^\circ=\overline{CA}$.

3） 因为$C\overline{A}=(CA)^\circ$是开集，所以$\overline{A}$是闭集.

点z_0称为集A的外点，如果存在一邻域$V(z_0;\varepsilon)$不属于A. 由1）推出，z_0是A的外点，其充要条件是$z_0\in C\overline{A}$. A的所有外点组成A的外部，即$\overline{A}$的余集$C\overline{A}$. 由2），$C\overline{A}=(CA)^\circ$，所以，A的外部就是A的余集的内部，它是开集.

点z称为集A的边界点，如果任意$\varepsilon>0$，$V(z;\varepsilon)$内既含有A的点，也含有不属于A的点. A的所有边界点组成的集称为A的边界，记作∂A. 显然，A的边界同时也是CA的边界，由1），A的边界点一定属于$\overline{A}$，同理也属于$\overline{CA}$，反之亦然. 所以$\partial A=\overline{A}\cap\overline{CA}$，故$\partial A$是闭集.又由2），$\overline{CA}=CA^\circ$，所以

$$\partial A=\overline{A}\cap CA^\circ=\overline{A}-A^\circ,$$

因此，集A将整个复平面分成几个互不相交的部分：

A的外部（开集）	$C\overline{A}$,
A的边界∂A（闭集）	$\overline{A}-A^\circ$,
A的内部（开集）	A°.

设有复数序列$z_n\in\mathbf{C}$ $(n=1,2,\cdots)$，称z_n收敛到点$z_0\in\mathbf{C}$①（或者称z_n趋于z_0），记作$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z_0$，如果对于任给$\varepsilon>0$，存在正整数$N$，使得当$n\geqslant N$时，$|z_n-z_0|<\varepsilon$. 即当$n\geqslant N$时，$z_n\in V(z_0;\varepsilon)$. 序列$z_n\in\mathbf{C}$ $(n=1,2,\cdots)$称为收敛到∞(或趋于∞)，记作$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\infty$，如果对于任给正数$R>0$，存在正整数$N$，使得当$n\geqslant N$时，$|z_n|>R$，即当$n\geqslant N$时，$z_n\in V(\infty;R)$.

序列$z_n\in\mathbf{C}$ $(n=1,2,\cdots)$ 称为Cauchy序列，如果对于任给$\varepsilon>0$，存在正整数N，使得当$m,n\geqslant N$时，

① 前面的讨论既可以理解为在有穷平面$\mathbf{C}$上，也可以理解为在扩充平面$\mathbf{C}_\infty$上，但是当涉及到两点之间的度量（距离）时，必须限定在$\mathbf{C}$上.除非以球面距离（见第一章§4习题6）作为我们的度量，才能使我们的讨论在$\mathbf{C}_\infty$上进行.

$$|z_n - z_m| < \varepsilon.$$

如果$z_n = x_n + iy_n$是Cauchy序列，那么，显然x_n与$y_n (n=1, 2, \cdots)$都是实的Cauchy序列，由实数的完备性，x_n与y_n都是收敛的．因此z_n也是收敛的，所以C是完备的．

若z_0是集A的极限点，则存在属于A的序列z_n，使得

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0.$$

事实上，若$z_0 \neq \infty$，z_0是A的极限点，在$V(z_0; 1/n)$内总有A的点z_n，显然$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$．若$z_0 = \infty$，则$V(\infty; n)$内总有$A$的点$z_n$，$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$．

集A称为有界集，如果A可以包含在以原点为中心的某一个圆内．在相反的情况下，称A是无界集．

设$A \subset \mathbf{C}$，A的直径定义为$\sup\{|z_1 - z_2|; z_1, z_2 \in A\}$，记为$\operatorname{diam} A$．若$A$是无界集，则$\operatorname{diam} A = +\infty$．

Cantor定理 若F_n是非空闭集序列，且$F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \cdots$，$\operatorname{diam} F_n \to 0 \ (n \to +\infty)$，则$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$由一点组成．

证明 对于每个n，在F_n中任取一点z_n，由于$F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \cdots$，所以当$n, m \geqslant N$时，$z_n, z_m \in F_N$．由直径的定义，$|z_n - z_m| \leqslant \operatorname{diam} F_N$．因为$\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_n = 0$，所以对于每个$\varepsilon > 0$，可取充分大的$N$，使得$\operatorname{diam} F_N < \varepsilon$．于是当$n$，$m \geqslant N$时，$|z_n - z_m| < \varepsilon$，$z_n$是Cauchy序列，所以存在$z_0$，使得$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$．

因为当$n \geqslant N$时，$F_n \subset F_N$，所以$z_n \in F_N$；F_N是闭的，所以$z_0 \in F_N$，并且显然对于一切N成立，于是$z_0 \in F = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$．

现在假如F还包含另外一点z_1，那么z_0，$z_1 \in F_n$ $(n=1,2,\cdots)$，

$$|z_1 - z_0| \leqslant \text{diam } F_n \to 0 \quad (n \to +\infty),$$

所以$|z_1 - z_0| = 0$，$z_1 = z_0$．

集A称为紧集，如果A或者是$\mathbf{C}$中的有界闭集，或者是$\mathbf{C}_\infty$中的闭集．

设有一集A，开集族$\mathscr{G}$称为A的开覆盖，如果A的每一点至少属于$\mathscr{G}$中的某一个开集．

Heine-Borel定理① 若A是紧集，$\mathscr{G}$是A的开覆盖，则从$\mathscr{G}$中必能选出有穷个开集$G_1, G_2, \cdots, G_n$，使得$A \subset \bigcup_{j=1}^{n} G_j$，即从紧集的开覆盖中必能选出$A$的一个有穷子覆盖．

证明 A是紧集，按定义A或是$\mathbf{C}$中的有界闭集，或是$\mathbf{C}_\infty$中的闭集．在后一种情形，若$z=\infty \overline{\in} A$，那么由于$A$是闭集：$\overline{A} = A$，所以由1)，必有$z=\infty$的邻域$V(\infty;R) \cap A = \phi$，即$A$的点全都在$|z| \leqslant R$内，$A$是有界闭集．若$z=\infty \in A$，由开覆盖的定义，$z=\infty$属于$\mathscr{G}$中的某一个开集，这样一来，只要考虑$A$中位于这一开集之外的子集即可．总之，我们只要对有界闭集来证明上述定理．

用反证法．设$\mathscr{G}$中不存在A的有穷子覆盖．因为A是有界闭集，所以A包含在正方形Q：$|x| \leqslant M$，$|y| \leqslant M$中．分Q为相等的四个小正方形，其中至少有一个小正方形Q_1，满足条件

1) $A \cap Q_1$是有界闭集；

2) 在$\mathscr{G}$中不存在$A \cap Q_1$的有穷子覆盖．

重复这一作法，可得到一列闭正方形Q_n（图2－1）．记

$$F_n = Q_n \cap A,$$

F_n满足条件

① 亦称为Borel-Lebesque定理．

1) F_n是有界闭集；

2) $F_{n+1}\subset F_n$

$(n=1,2,\cdots)$；

3) 在$\mathscr{G}$中不存在F_n的有穷子覆盖；

4) $\operatorname{diam}F_n\leqslant\frac{M}{2^n}\sqrt{2}\to 0$

$(n\to+\infty)$．显然，F_n满足Cantor定理的条件，所以存在复数z_0

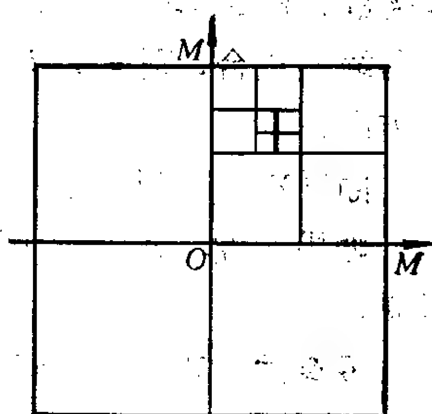


图 2-1

$=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$．因为$F_n\subset A$，$z_0\in A$，所以$z_0$必属于$\mathscr{G}$中的某一开集$G_0$，故有某一邻域$V(z_0;\varepsilon)\subset G_0$．由于$\operatorname{diam}F_n\to 0$，当$n$充分大时，$F_n\subset G_0$，这与$\mathscr{G}$中不存在$F_n$的有穷子覆盖相矛盾．证毕．

上述定理又称为有穷(限)覆盖定理．从这一定理容易得到下面的定理．

Bolzano-Weierstrass定理 任一无穷集至少有一极限点．

证明 设A是一无穷集．若A是无界集，则显然$z=\infty$就是A的一个极限点．若A是有界集，并且沒有极限点，那么A为一闭集．对于A的每一个点z，都存在z的一个邻域$V(z;\delta)$，使得除去z外，它不再包含A的点．显然，这些邻域构成A的一个开覆盖．由Heine-Borel定理，可从这个开覆盖中选出有穷个邻域，它仍然覆盖A，于是A就只有有穷多个点了，这与定理的条件不符，所以A必有一个极限点．证毕．

2. 曲线．域

我们定义曲线(路径)为区间$[\alpha,\beta]$上的连续复値函数$\gamma(t)$，写成$\gamma(t)=x(t)+iy(t)$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$，其中$x(t)$，$y(t)$都是连续

实函数．$\gamma(\alpha)$与$\gamma(\beta)$称为曲线$\gamma(t)$的端点．如果$\gamma(\alpha)=\gamma(\beta)$，即两端点重合，则称$\gamma(t)$为闭曲线，曲线的方向就是参数$t$增加的方向．

曲线$\gamma(t)$的反向曲线为$\gamma(-t)$，$-\beta\leqslant t\leqslant-\alpha$，记作$\gamma^{-1}$.

如果把曲线γ看作一个点集$\{\gamma(t),\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta\}$，那么它是一紧集．

设有曲线$\gamma(t)$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$．对区间$[\alpha,\beta]$作分割$t=\alpha<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=\beta$，得到以$z_j=\gamma(t_j)$ $(0\leqslant j\leqslant n)$为顶点的折线$P$，记为$[z_0,z_1,z_2,\cdots,z_n]$，$P$的长度为

$$v(\gamma;P)=\sum_{j=1}^{n}|\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})|.$$

若不论如何分割区间$[\alpha,\beta]$，$v(\gamma;P)$都是有界的，则称曲线γ是可求长的．$v(\gamma;P)$的上确界称为γ的长度．

如果$\gamma'(t)=x'(t)+iy'(t)$存在，且$\gamma'(t)\neq0$（在端点有左、右导数，在闭曲线的情况下，这两个导数相等），则$\gamma(t)$在每一点都有切线．事实上，通过$\gamma(t)$上的点$z_0=\gamma(t_0)$和动点$z=\gamma(t)$作一割线，割线的方向是$\dfrac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}$．由于极限

$$\lim_{t\to t_0}\frac{z-z_0}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}=\gamma'(t_0)\neq0,$$

所以当$t\to t_0$时割线有极限位置，换句话说曲线在点$z_0=\gamma(t_0)$处的切向量为$\gamma'(t_0)$．它与正实轴的夹角为$\mathrm{Arg}\gamma'(t_0)$．此外，若$\gamma'(t)$连续，则$\gamma(t)$的切线随t而连续变化，这时，我们称$\gamma(t)$是光滑曲线．

若$\gamma'(t)$除去有穷多个t值外是连续的，在这有穷多个t值处$\gamma(t)$有左右导数，则称$\gamma(t)$是分段光滑曲线．

若$\gamma(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$是光滑曲线，则$\gamma(t)$是可求长的，且$\gamma(t)$的长度

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}|\gamma'(t)|dt.$$

证明留给读者作为习题.

若曲线$\gamma(t)$仅当$t_1=t_2$时，$\gamma(t_1)=\gamma(t_2)$，则称$\gamma(t)$是简单曲线或Jordan弧. 若$\gamma(t)$是一闭曲线，仅当t_1,t_2二值中一个是α，另一个是β时，才有$\gamma(t_1)=\gamma(t_2)$，则称$\gamma(t)$是简单闭曲线或Jordan(闭)曲线.

一个点集D称为一个域，如果它满足以下两个条件：

1）D是开集；2）D内任意两点均能用完全位于D中的曲线把它们连接起来.

通常称具有性质 2)的集D为连通的，所以一个域就是一连通开集. 域D的闭包称为闭域，记作$\overline{D}$.

Jordan定理 一条简单闭曲线$\gamma(t)$把复平面分成两个域，其中一个是有界的，称为$\gamma(t)$的内部；另一个是无界的，称为$\gamma(t)$的外部，$\gamma(t)$是这两个域的共同边界.

这个定理看来直观，证明却比较复杂.

称一个域D是单连通的，如果D内的任意简单闭曲线的内部仍属于D. 特别地，一条简单闭曲线的内部是一个单连通域.

不是单连通的域称为多连通域. 对于多连通域D，存在D内的简单闭曲线，其内部有不属于D的点. 如图 2-2 所示，由两条Jordan闭曲线所围成的域是二连通域. 由n条Jordan闭曲线围成的域是n连通域，这些闭曲线可能退化为一个点或一条Jordan弧（见图2-3）.

直观上说，一个有界n连通域具有n-1个"洞". 在无界域的情形，我们约定，除非作特别的声明，总是指有穷平面$\mathbb{C}$上的域，即不包含无穷远点. 这样，任意一个n连通域，都具有n-1个"洞". 在Riemann球面上，n连通域就是具有n个"洞"的域. 比如单位圆周的外部$|z|>1$是无界的二连通域.

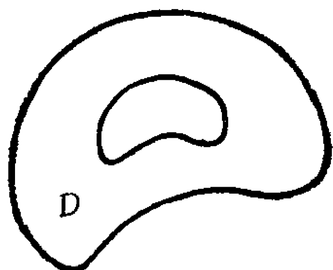


图 2-2

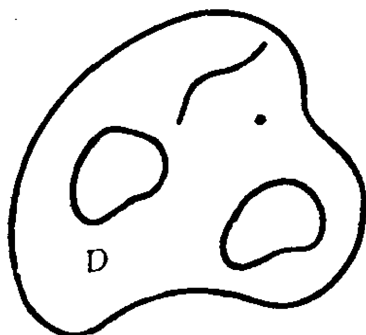


图 2-3（五连通域）

习 题

1． 证明：序列$z_n \in \mathbb{C}(n=1,2,\cdots)$收敛到点$z_0 \in \mathbb{C}$，其充要条件为$\mathrm{Re}\,z_n, \mathrm{Im}\,z_n$分别收敛到$\mathrm{Re}\,z_0, \mathrm{Im}\,z_0$.

2． 证明：序列$z_n \in \mathbb{C}(n=1,2,\cdots)$收敛到点$z_0 \in \mathbb{C}$，$z_0 \neq 0$，其充要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}|z_n| = |z_0|$，$\lim\limits_{n\to\infty}\arg z_n = \arg z_0$.

3． 证明：

(1) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+iy}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i\sin y).$$

(2) $$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{z}-1) = \log|z| + i\arg z + 2\pi i k$$

$$(k=0,1,2,3,\cdots).$$

4． 证明：若$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} z'_n = b$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k z'_{n-k} = ab.$$

5． 证明：若z_0是集A的极限点，则z_0的任一邻域内有无穷多个属于A的点.

6. 证明：(1) A' 是闭集；(2) 任一集的孤立点是有穷多个或可列个.

7. 设 $A,B\subset \mathbf{C}$ 为两个点集，A,B 间的距离 $d(A,B)$ 定义为

$$d(A,B)=\inf_{\substack{z\in A\\ z'\in B}}|z-z'|.$$

证明：

(1) $|d(z_1,A)-d(z_2,A)|\leqslant|z_1-z_2|$，其中 $z_1,z_2\in\mathbf{C}$ 是任意两个复数.

(2) 若 A 是闭集，B 是紧集，且 $A\cap B=\Phi$，则

$$d(A,B)>0.$$

8. 设给定曲线：$z=\gamma(t)=r(t)(\cos t+i\sin t)$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$，其中 $r(t)$ 是正的可微函数，求切线和向径之间的夹角.

9. 若 $\gamma(t)$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 是光滑曲线，则 $\gamma(t)$ 是可求长的，且 $\gamma(t)$ 的长度

$$L=\int_\alpha^\beta|\gamma'(t)|dt.$$

§2　解析函数的概念

1. 复变函数

设在有穷复平面 $\mathbf{C}$ 上给定一集 A. 若对每一个 $z\in A$，按照一规律有唯一确定的有穷复数 w 与之对应，则称在 A 上确定一函数，记作 $w=f(z)$，有时也称在 A 上确定一映照 $f(z)$. "函数"在于着重说明复数和复数之间的对应关系，"映照"在于着重说明点与点之间的对应关系. 今后，除非特别声明，我们所讨论的函数(映照)总是指按照上述规定的单值函数(映照).

对于每一个点$z\in A$，所有的点$f(z)$所组成的集称为A在映照f下的象，记作$f(A)$。如$f(A)\subset F$，我们说f将A映入F，或者说f是A到F里的映照；如果$f(A)=F$，则称f把A映为F，或者说f是A到F上的映照。

如果$f(z_1)=f(z_2)$蕴含着$z_1=z_2$，即不同的点的象也是不同的，则称映照f是一一的或双方单值的。在这种情况下，$w=f(z)$有一个定义在$f(A)$上的反函数或逆映照，记作$z=f^{-1}(w)$。

设$f(z)$定义在集A上，z_0是A的极限点，当z趋于z_0时，我们称$f(z)$有极限l，记作

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=l,$$

如果对于任给$\varepsilon>0$，存在一正数δ，使得当$z\in V(z_0;\delta)\cap A$，且$z\neq z_0$时，$f(z)\in V(l;\varepsilon)$（当z_0为无穷远点时，有类似的定义）。

又若$a\in A$，称$f(z)$在点$z=a$连续，如果

$$\lim_{z\to a} f(z)=f(a),$$

即对于任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得

$$f(V(a;\delta)\cap A)\subset V(f(a);\varepsilon).$$

若$f(z)$在A的每一点都连续，则称$f(z)$在A上连续。

若A是有界闭集，$f(z)$在A上连续，则

1） $f(z)$在A上有界；

2） $|f(z)|$在A上取到最大值和最小值，即在A上存在点z_1,z_2，使得对所有的$z\in A$，有

$$|f(z)|\leqslant|f(z_1)|,\quad |f(z_2)|\leqslant|f(z)|;$$

3） $f(z)$在A上一致连续，即对于任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得对于A上的任意两点z_1,z_2，只要$|z_1-z_2|<\delta$，便有

$$|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon.$$

与数学分析中相应的定理一样，以上三条性质都可以应用

Heine-Borel定理予以证明，这里留给读者作为习题.

2. 导数

设函数$f(z)$在域D内有定义，$z_0\in D$，若极限

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \tag{1}$$

存在，则称$f(z)$在点$z=z_0$处是可导的，这个极限值就称为$f(z)$在点$z=z_0$的导数(微商)，记作$f'(z_0)$.

若记$\Delta z=z-z_0$，$\Delta f=f(z)-f(z_0)=f(z_0+\Delta z)-f(z_0)$，

$$\rho(\Delta z)=\Delta f-f'(z_0)\Delta z,$$

那么由(1)式，

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\rho(\Delta z)}{\Delta z}=0. \tag{2}$$

所以，若$f(z)$在点$z=z_0$可导，则在点z_0的邻域内，$f(z)$ 可写成

$$f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=f'(z_0)\Delta z+\rho(\Delta z), \tag{3}$$

其中$\rho(\Delta z)$满足(2)式. $f'(z_0)\Delta z$ 是Δf的主要线性部分，称它为$f(z)$在点$z=z_0$的微分，记作df(图2-4). 当$f(z)=z$时，

$$f'(z_0)=1,\qquad dz=\Delta z,$$

所以$df=f'(z_0)dz$，$f'(z_0)=\dfrac{df}{dz}$.

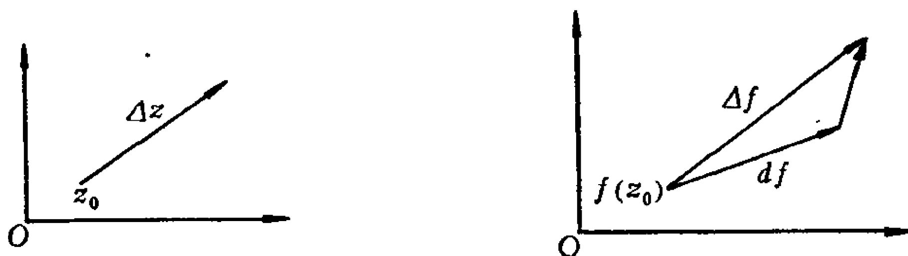


图 2-4

显然，若$f(z)$在点$z=z_0$可导，那么$f(z)$在点z_0必连续. 事实上，由(3)式，立即得到$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\Delta f=0$，即$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$. 反之，

若$f(z)$在点z_0连续，则$f(z)$未必在点z_0可导．

例 1 研究$f(z)=\mathrm{Re}z$的可导性．

显然$f(z)$在**C**上是连续的．设z_0是任一复数，$z_0=x_0+iy_0$．

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{\mathrm{Re}(z-z_0)}{z-z_0}.$$

若$z=x+iy_0$，$\Delta z=z-z_0=x-x_0$，则

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=1;$$

若$z=x_0+iy$，$\Delta z=z-z_0=i(y-y_0)$，则

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=0,$$

所以$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta z}$不存在，即$f(z)$在**C**上处处不可导（在数学分析中构造一个处处连续，但处处不可导的函数是很困难的！）．

如果函数$f(z)$在域D内的每一点都可导，则称函数$f(z)$在域D内是解析的①．有时，我们也说函数在一点解析，意思就是函数在该点的一个邻域里解析．

与数学分析一样，导数的运算法则仍然成立．若函数$f(z)$，$g(z)$在域D内解析，则$f(z)\pm g(z)$，$f(z)g(z)$在域D内也解析，并且

$$(f(z)\pm g(z))'=f'(z)\pm g'(z), \tag{4}$$

$$(f(z)g(z))'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z). \tag{5}$$

又若对于域D内的每一点z，$g(z)\neq 0$，则$f(z)/g(z)$在域D内解析，并且

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)'=\frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)}. \tag{6}$$

例 2 证明$f(z)=z^n$（n是正整数）在**C**上是解析的．

$f(z)$在**C**上有定义．显然，当$n=1$时，$f'(z)\equiv 1$，$z\in$**C**．应

---

① 亦称$f(z)$在域D内是全纯的．

用归纳法，并由(5)式，得到$f'(z)=nz^{n-1}$，$z\in\mathbf{C}$，所以$f(z)$在有穷平面上是解析的，由(4)式可知多项式

$$P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$$

在$\mathbf{C}$上是解析的，再由(6)式得出有理函数

$$R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}\ (P(z),\ Q(z)\text{是两个多项式}),$$

在$\mathbf{C}$中除去使$Q(z)=0$的点（和实系数的情形一样，我们将证明这样的点只有有穷多个）的域内是解析的。

对于复变函数，下面的链式法则也成立。

定理1 若函数$\zeta=f(z)$在域D内解析，函数$g(\zeta)$在域E内解析，$f(D)\subset E$，则函数$\varphi(z)=g[f(z)]$在域D内解析，且

$$\varphi'(z)=g'[f(z)]f'(z). \tag{7}$$

证明 设z_0是D内任意一点．由条件$\zeta_0=f(z_0)$属于E内，$g(\zeta)$在ζ_0可导，所以

$$g(\zeta)-g(\zeta_0)=g'(\zeta_0)(\zeta-\zeta_0)+\rho(\zeta-\zeta_0),$$

$$\Delta g=g'(\zeta_0)\Delta\zeta+\rho(\Delta\zeta).$$

将$\zeta=f(z)$，$\zeta_0=f(z_0)$代入上式，并用Δz除等式两边，得到

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta z}=g'[f(z_0)]\frac{\Delta f}{\Delta z}+\frac{\rho(\Delta\zeta)}{\Delta z}.$$

因为

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\rho(\Delta\zeta)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\rho(\Delta\zeta)}{\Delta\zeta}\cdot\frac{\Delta\zeta}{\Delta z}=0,$$

所以

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta z}=g'[f(z_0)]f'(z_0).$$

因为z_0是D内任意一点，所以(7)式在D内成立．定理证毕．

设$w=f(z)$是域D内的解析函数且不为常数．在第八章里我们将证明$E=f(D)$也一定是一个域．但是对于E内的w，可能在

D 内不止一个 z，使得 $f(z)=w$，所以一般说来，反函数是一个多值函数．但是如我们假定 $w=f(z)$在D内是一一的，这种函数我们称它为单叶函数，那么这个函数的反函数在E内是单值的．

定理 2 若函数 $w=f(z)$ 在域D内是单叶解析的，其反函数 $z=g(w)$在域$E=f(D)$内连续①，则$g(w)$在E内解析，且

$$g'(w)=\frac{1}{f'[g(w)]}^{②}. \tag{8}$$

证明 设$w_0\in E, z_0=g(w_0)$，因为$z=g(w)$是 $w=f(z)$的反函数，所以$w=f[g(w)]$，故

$$\frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0}=\frac{g(w)-g(w_0)}{f[g(w)]-f[g(w_0)]}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{f[g(w)]-f[g(w_0)]}{g(w)-g(w_0)}}.$$

因为 $g(w)$在w_0连续，所以 $\lim\limits_{w\to w_0} g(w)=g(w_0)$，于是

$$\lim_{w\to w_0}\frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0}=\frac{1}{f'[g(w_0)]}.$$

定理证毕．

3. 函数可导的充要条件．Cauchy-Riemann方程

设函数$f(z)$在$z_0=x_0+iy_0$可导，按定义

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

---

① 以后我们会看到，这个条件可由函数$f(z)$在域D内单叶解析推出来．

② 在第八章里我们将证明，单叶解析函数的导数一定不为零．

存在，式中$z\to z_0$的方式是任意的，特别是，z可沿平行于坐标轴的方式趋于z_0(图2-5)。设$z=x+iy, f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$。若$z=x+iy_0$，则$z-z_0=x-x_0$，

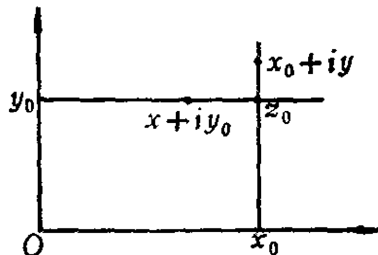


图 2-5

$$f'(z_0)=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{u(x,y_0)-u(x_0,y_0)}{x-x_0}+i\frac{v(x,y_0)-v(x_0,y_0)}{x-x_0}\right]$$

$$=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0).$$

同样，若$z=x_0+iy$，则$z-z_0=i(y-y_0)$，

$$f'(z_0)=\lim_{y\to y_0}\left[\frac{u(x_0,y)-u(x_0,y_0)}{i(y-y_0)}+\frac{v(x_0,y)-v(x_0,y_0)}{y-y_0}\right]$$

$$=v_y(x_0,y_0)-iu_y(x_0,y_0).$$

比较两式的实部和虚部，得到u，v在点(x_0,y_0)应满足条件：

$$\begin{cases} u_x=v_y, \\ u_y=-v_x. \end{cases} \tag{9}$$

这就是说，若$f(z)$在x_0+iy_0可导，那么$u(x,y)$，$v(x,y)$在(x_0,y_0)处有一阶偏导数，并且它们满足方程(9)。方程(9)称为Cauchy-Riemann方程，简称C-R方程.

我们已经看到，C-R方程是$f(z)$在点z_0可导的必要条件，但它并非$f(z)$在z_0可导的充分条件（见下面的例3）．这是不难想象得到的，因为导出C-R方程时，只用到可导这个较一般性的条件的特殊情形.

例3 研究$f(x+iy)=\sqrt{|xy|}$在$z=0$的可导性.

因为 $u(x,y)=\sqrt{|xy|}$ ，$v(x,y)=0$，所以

$$u_x(0,0)=u_y(0,0)=v_x(0,0)=v_y(0,0)=0,$$

故在点$(0,0)$满足C-R方程，如果令 z 沿直线

$$\begin{cases} x=\alpha t, \\ y=\beta t \end{cases}$$

（α,β不同时为零）趋于零时，

$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\frac{f(z)}{z}=\frac{\sqrt{|\alpha\beta|}}{\alpha+i\beta}$$

的极限不是唯一的，可见$f(z)$在点$z=0$是不可导的。

但是，我们有下面的定理。

定理3 若函数 $f(z)=u+iv$ 在域 D 内定义，$z_0=x_0+iy_0 \in D$，则 $f(z)$ 在点 z_0 可导的充要条件是：$u(x,y)$，$v(x,y)$ 在点(x_0,y_0)可微，且满足C-R方程。

证明 必要性。设$f(z)$在点z_0可导，$f'(z_0)=a+ib$，

$$\Delta f=f'(z_0)\Delta z+\rho(\Delta z),$$

其中$\rho(\Delta z)=\varepsilon_1(\Delta z)+i\varepsilon_2(\Delta z)$ 满足$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\rho(\Delta z)}{\Delta z}=0$。比较上式的实部和虚部得到

$$\Delta u=a\Delta x-b\Delta y+\varepsilon_1(\Delta z),$$
$$\Delta v=b\Delta x+a\Delta y+\varepsilon_2(\Delta z),$$

显然式中$\varepsilon_1(\Delta z),\varepsilon_2(\Delta z)$ 满足条件

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\varepsilon_1(\Delta z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\varepsilon_2(\Delta z)}{\Delta z}=0,$$

所以$u(x,y),v(x,y)$在点(x_0,y_0)可微，且

$$u_x(x_0,y_0)=u_y(x_0,y_0)=a,$$
$$u_y(x_0,y_0)=-v_x(x_0,y_0)=-b.$$

充分性。设u,v在点(x_0,y_0)可微，且在这点满足C-R 方程。若记$\alpha=u_x(x_0,y_0)$，$\beta=v_x(x_0,y_0)$，那么

$$u(x,y)-u(x_0,y_0)=\alpha(x-x_0)-\beta(y-y_0)+\varepsilon_1(|\Delta z|),$$
$$v(x,y)-v(x_0,y_0)=\beta(x-x_0)+\alpha(y-y_0)+\varepsilon_2(|\Delta z|),$$

其中 $|\Delta z|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$，$\varepsilon_1,\varepsilon_2$满足条件

$$\lim_{|\Delta z|\to 0}\frac{\varepsilon_1(|\Delta z|)}{|\Delta z|}=\lim_{|\Delta z|\to 0}\frac{\varepsilon_2(|\Delta z|)}{|\Delta z|}=0.$$

将第一式与第二式乘以 i 相加得到，

$$f(z)-f(z_0)=(\alpha+i\beta)(z-z_0)+\varepsilon_1(|\Delta z|)+i\varepsilon_2(|\Delta z|),$$

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-(\alpha+i\beta)=\frac{\varepsilon_1(|\Delta z|)+i\varepsilon_2(|\Delta z|)}{z-z_0}.$$

所以

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\alpha+i\beta,$$

即 $$f'(z_0)=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0).$$

我们知道，$u(x,y),v(x,y)$具有一阶连续偏导数是u,v可微的充分条件，所以u，v有一阶连续偏导数且满足C-R方程是$f(z)=u+iv$可导的充分条件．并且，这个条件也是必要的．因为后面我们要证明：一个解析函数的导函数 $f'(z)$ 也是解析的，因此，$f'(z)=u_x+iv_x=v_y-iu_y$是连续的．于是我们有下面的定理．

定理4 函数$f(z)=u+iv$在域D内解析的充要条件是：u，v在D内有一阶连续偏导数，且满足C-R方程

$$u_x=v_y,\quad u_y=-v_x.$$

若$f(z)$在D内解析，$f'(z)$可以写成以下四种形式：

$$f'(x)=u_x+iv_x=v_y-iu_y=u_x-iu_y=v_y+iv_x. \tag{10}$$

设$f(z)=u+iv$在域 D 内解析．由于解析函数的导函数也是解析的，所以u,v的二阶偏导数是连续的，因而混合偏导数相等．由C-R方程得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}.$$

两式相加得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{11}$$

同理

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0. \tag{12}$$

若一个实函数 $u(x,y)$ 在域 D 内有连续二阶偏导数，且满足 Laplace方程

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

则称$u(x,y)$是域D内的调和函数．因此根据上面的讨论得到：一个域D内的解析函数$f=u+iv$，其实部 u 和虚部 v 都是域D内的调和函数，并且它们在D内满足 C-R 方程．我们称 v 是 u 的共轭调和函数．

4. 导数的几何意义

设函数$f(z)$在域 D 内解析，$z_0\in D$，$f'(z_0)\neq 0$，考虑 D 内过点 z_0 的一条光滑曲线 $\gamma(t)$，$0\leqslant t\leqslant 1$，$\gamma(0)=z_0$，$\gamma(t)$ 在点 z_0的切线与实轴的夹角为 $\mathrm{Arg}\gamma'(0)$．$f(z)$ 把 $\gamma(t)$ 映为过点 $w_0=f(z_0)$的光滑曲线①$\sigma(t)=f[\gamma(t)]$．$\sigma'(t)=f'[\gamma(t)]\gamma'(t)$，$\sigma'(0)=f'(z_0)\gamma'(0)$．$\sigma(t)$在点 w_0 的切线与实轴的夹角为

$$\mathrm{Arg}\sigma'(0)=\mathrm{Arg}f'(z_0)+\mathrm{Arg}\gamma'(0),$$

或写成

$$\mathrm{Arg}\sigma'(0)-\mathrm{Arg}\gamma'(0)=\mathrm{Arg}f'(z_0),$$

即$\sigma(t)$在点w_0 处切向量的幅角与 $\gamma(t)$ 在点z_0处切向量的幅角之

---

① 由于$f'(z_0)\neq 0$，$\sigma(t)$至少在点w_0的附近是光滑的．

差总是 $\mathrm{Arg} f'(z_0)$，而与 $\gamma(t)$ 无关（图2-6）．因此，如果考虑过点 z_0 的任意两条光滑曲线 $\gamma_1(t)$，$\gamma_2(t)$，$0 \leqslant t \leqslant 1$，$\gamma_1(0)=\gamma_2(0)=z_0$，它们在映照 $f(z)$ 下的象分别是通过点 $w_0=f(z_0)$ 的光滑曲线 $\sigma_1(t)$ 与 $\sigma_2(t)$．由上面的讨论

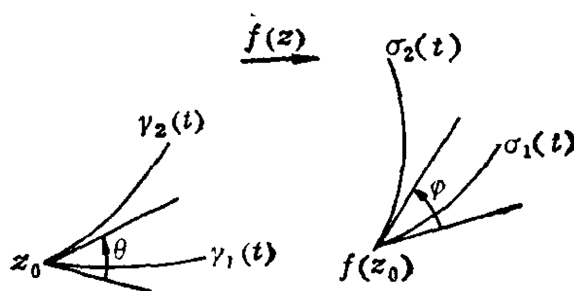


图 2-6

$$\mathrm{Arg}\sigma_2'(0)-\mathrm{Arg}\gamma_2'(0)=\mathrm{Arg}\sigma_1'(0)-\mathrm{Arg}\gamma_1'(0),$$

即

$$\mathrm{Arg}\sigma_2'(0)-\mathrm{Arg}\sigma_1'(0)=\mathrm{Arg}\gamma_2'(0)-\mathrm{Arg}\gamma_1'(0).$$

上式的右边表示 $\gamma_1(t)$ 与 $\gamma_2(t)$ 在点 z_0 处的夹角 θ，左边表示 $\sigma_1(t)$ 与 $\sigma_2(t)$ 在点 $w_0=f(z_0)$ 处的夹角 φ，而 $\varphi=\theta$．这就是说在映照 $f(z)$ 下，在导数不为零的点处，两条曲线的夹角的大小与旋转方向都是保持不变的．我们称 $f(z)$ 在点 z_0 处是保角的．

定理 5　若函数 $f(z)$ 在域 D 内解析，则在 $f'(z)\neq 0$ 的点处 $f(z)$ 是保角的．

以上是导数的幅角的几何意义．导数的模的几何意义是明显的．因为

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z_0)-f(z_0)}{z-z_0},$$

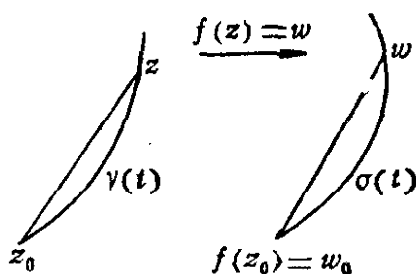


图 2-7

所以若任取过 z_0 的曲线 $\gamma(t)$，它在 $f(z)$ 下的象为 $\sigma(t)$（图2-7）．那么

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in\{\gamma\}}}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}=\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in\{\gamma\}}}\frac{|w-w_0|}{|z-z_0|}=|f'(z_0)|,$$

因为 $\gamma(t)$ 是过点 z_0 的任意曲线，所以上式表明象点之间的距离与原象之间的距离之比的极限与曲线无关，故称 $|f'(z_0)|$ 为 $f(z)$ 在

点z_0的伸长度.

从导数的幅角与模的几何意义，我们看到当$f'(z_0)\neq 0$时，$f(z)$在点z_0的邻域内，以z_0为顶点的小三角形被映为一曲边三角形，它的微分三角形与z平面上的三角形是相似的（图2-8）．因此我们把域D内的单叶解析函数称为共形映照（或保角变换）.

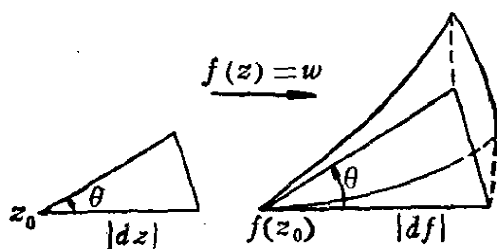


图 2-8

例 4 研究映照$w=f(z)=z^2$的保角性.

由例2，$f(z)$的导函数

$$f'(z)=2z.$$

当$z\neq 0$时，$f'(z)\neq 0$．因此$f(z)$在$\mathbb{C}$上不为零的每一点都是保角的．设$z=x+iy$，$f(z)=u+iv$，

$$f(z)=z^2=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+2ixy.$$

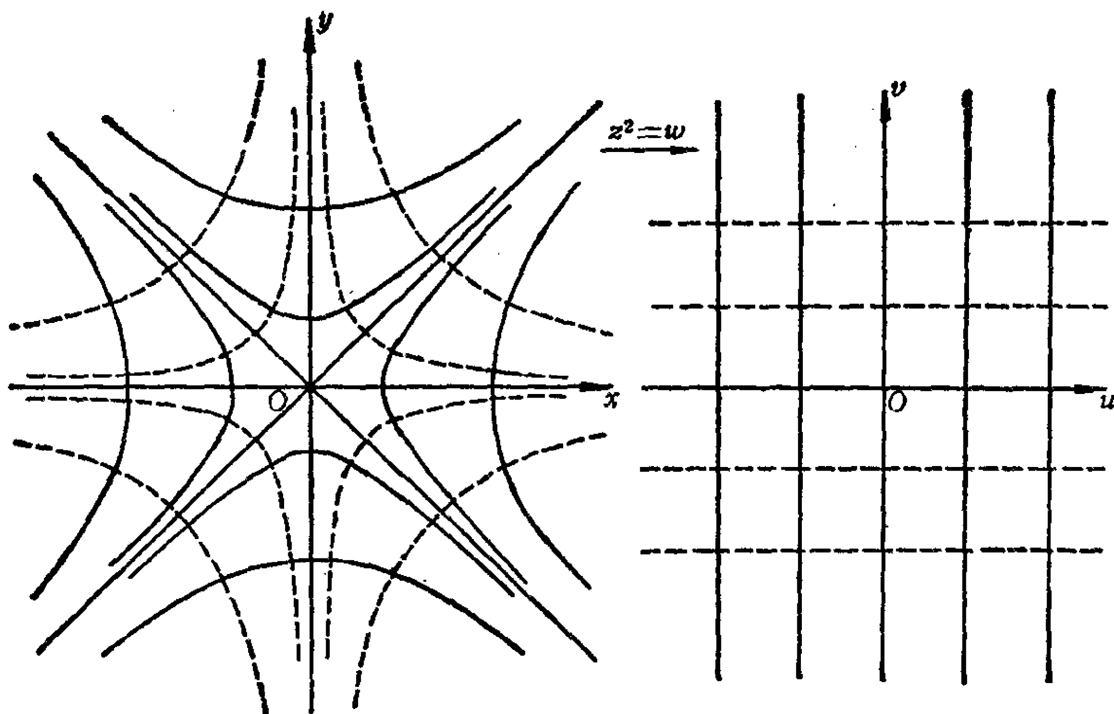


图 2-9

故$u=x^2-y^2$，$v=2xy$．因此双曲线$x^2-y^2=C_1$（常数）的象是垂直线$u=C_1$；双曲线$2xy=C_2$（常数）的象是水平线$v=C_2$(图2-9)．

两族双曲线$x^2-y^2=C_1$（$\neq 0$）与$2xy=C_2$（$\neq 0$）相互正交，$f(z)$把它们分别变为w平面上的垂直直线族和水平直线族．在点$z=0$处，$f(z)$是不保角的．

习　题

1．验证下列函数的可导性：

(1) $f(z)=|z|$；

(2) $f(z)=\bar{z}$；

(3) $f(z)=z\mathrm{Re}z$．

2．验证函数

$$f(z)=\begin{cases}(1+i)\dfrac{\mathrm{Im}z^2}{|z|^2}, & z\neq 0;\\ 0, & z=0,\end{cases}$$

在点$z=0$满足C-R方程．$f(z)$在点$z=0$可导吗？

3．证明：若函数$f(z)$在域D内解析，并且$f'(z)\equiv 0$，则$f(z)$在D内为常数．

4．若函数$f(z)$在域D内解析，且满足下列条件之一：1) $\mathrm{Re}f(z)$在D内是常数；2) $\mathrm{Im}f(z)$在D内是常数；3) $|f(z)|$在D内是常数；4) $f(z)$的幅角是常数，则$f(z)$在D内是常数．

5．若函数$f(z)=u+iv$在域D内解析，且$u=v^2$，则$f(z)$在D内是常数．

6．若v是u的共轭调和函数，则u是$-v$的共轭调和函数．

7．若$f(z)=u+iv$是解析函数，并且$f'(z)\neq 0$，则曲线$u(x,y)=C_1$与$v(x,y)=C_2$正交，C_1,C_2是常数．

8．若函数$f(z)$，$g(z)$在点z_0解析，且$f(z_0)=g(z_0)=0$，

$g'(z_0)\neq 0$，则

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

9． 证明：在极坐标系下（$f=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$），C-R方程为

$$u_r=\frac{1}{r}v_\theta,\quad v_r=-\frac{1}{r}u_\theta,$$

且

$$f'(z)=\frac{r}{z}(u_r+iv_r).$$

10．设 $f(z)=R(\cos\varphi+i\sin\varphi)$，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，证明C-R方程为

$$\frac{\partial R}{\partial r}=-\frac{R}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta},\qquad \frac{\partial R}{\partial\theta}=-Rr\frac{\partial\varphi}{\partial r}.$$

11．记

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial\bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

证明：若函数$f(z)$在域D内解析，则

$$\frac{\partial f}{\partial\bar z}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=f'(z).$$

12．设函数$f=u+iv$在域D内解析，证明

$$J=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}=|f'(z)|^2,$$

并给出它的几何解释．

13．设函数 $f(z)$ 在域 D 内单叶解析，Γ：$z=\gamma(t)$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$与 Ω 分别是 D 内的曲线和子域．求在映照 $f(z)$下，$f(\Gamma)$的长度与$f(\Omega)$的面积．

14．设曲线$|z-1|=1$在映照$w=z^2$下的象为Γ，求Γ的长度

及Γ所范围的域的面积．

15．设函数$f(z)$在域D内解析，且$f(z)\neq 0$，求证

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)| = \frac{|f'(z)|^2}{|f(z)|},$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2.$$

一般地，$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y}\right)|f(z)|^p = p^2|f(z)|^{p-2}|f'(z)|^2$，$p$为正整数．

16．若函数$f=u+iv$在点z_0满足条件：

1） u及v在点z_0可微；

2） $\lim\limits_{z\to z_0}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|$存在，

则或者$f(z)$在点z_0可导，或者$\overline{f(z)}$在点z_0可导．

§3　初等解析函数及其所构成的映照

在前一节里，我们对解析函数的概念作了一般性的讨论．这一节我们将要研究若干基本初等函数，其中指数函数及其反函数是基本的．

1．指数函数

设$z=x+iy$是任意复数，指数函数e^z定义为

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y). \tag{13}$$

由此我们可以得到指数函数的性质：

1） 指数函数不取零值：$e^z\neq 0$，事实上$|e^z|=e^x>0$．

2） 对于任意的z_1，z_2，有

$$e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2}. \tag{14}$$

由 $z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2,$

可得

$$
\begin{aligned}
e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) \\
&= e^{x_1+x_2}(\cos y_1 + i\sin y_1)(\cos y_2 + i\sin y_2) \\
&= e^{x_1+x_2}[\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)] \\
&= e^{z_1+z_2}.
\end{aligned}
$$

3） e^z以 $2\pi i$ 为周期.

因为按定义$e^{2\pi i} = 1$，所以由 2 ）

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z.$$

4） 对于任意的实数θ，有

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta. \qquad (15)$$

这个式子叫做Euler公式.

事实上，在(13)式中取$x = 0, y = \theta$，我们便得到(15)式.

由于任意复数 z 可以写成三角形式

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

其中 r 是 z 的模 $|z|$，θ是 z 的一个幅角，故由 Euler 公式(15)，我们可以将任一复数写成指数形式

$$z = re^{i\theta}.$$

5） e^z在$\mathbf{C}$上解析，且$(e^z)' = e^z$.

证明 设$z = x + iy$，按定义

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y),$$

其实部和虚部

$$u(x,y) = e^x\cos y, \quad v(x,y) = e^x\sin y,$$

以及

$$u_x = v_y = e^x\cos y, \quad u_y = -v_x = -e^x\sin y$$

都在$\mathbf{C}$上连续. 根据定理4，e^z在$\mathbf{C}$上解析，且

$$(e^z)' = u_x + iv_x = e^x\cos y + ie^x\sin y,$$

即

$$(e^z)' = e^z. \qquad (16)$$

6) e^z的单叶性域.

称域D是函数的单叶性域，就是说函数在域 D 内是单叶的. 设z_1, z_2使得$e^{z_1}=e^{z_2}$，即

$$e^{x_1}(\cos y_1+i\sin y_1)=e^{x_2}(\cos y_2+i\sin y_2),$$

或

$$e^{x_1}e^{iy_1}=e^{x_2}e^{iy_2}.$$

因此 $x_1=x_2$, $y_1=y_2+2\pi k$,

$$z_1-z_2=2k\pi i,$$

其中k是整数. 所以不包含满足$z_1-z_2=2k\pi i$的z_1, z_2的域都可以作为 e^z 的单叶性域. 为简单起见，我们可以取平行于实轴的带域$2k\pi<y<2(k+1)\pi$, $k=0, \pm1, \pm2, \cdots$作为e^z 的单叶性域. 由于e^z有周期性，故对于e^z的映照性质我们只要在带域$0<y<2\pi$中研究即可. 设$z=x+iy$, $0<y<2\pi$, $w=e^z=\rho e^{i\varphi}$，于是

$$\rho=e^x, \quad \varphi=y.$$

由此可见，直线$y=y_0$变为射线$\varphi=y_0$；线段$x=x_0, 0<y<2\pi$变为圆周$|w|=\rho=e^{x_0}$（去掉$w=e^{x_0}$这一点）（图2-10）. 因此，对于指数函数来说，它是把带域 $0<y<2\pi$单叶地变为$\mathbf{C}$上去掉正实轴的域$E=\mathbf{C}-\{z: z\geqslant0\}$. 直线$y=0$变为正实轴的上边沿，直线$y=2\pi$变为正实轴的下边沿，带域$0<y<\pi$ 变为上半平面，带域$\pi<y<2\pi$变为下半平面. 一般地说，指数函数把带域 $0<y<h$ $(0<h\leqslant2\pi)$变为角域$0<\arg w<h$.

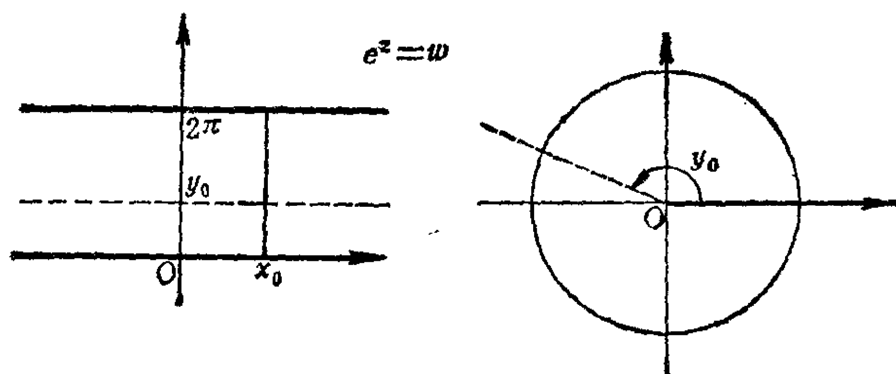


图 2-10

由于e^z的周期性，故它也把其他带域D_k：$2k\pi < y < 2(k+1)\pi$ $(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 单叶地变为域E.

2. 儒可夫斯基函数

$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \tag{17}$$

这个函数在 z 平面上去掉原点的域内显然是解析的. 现在我们来研究它的单叶性域. 设z_1, z_2使得

$$\frac{1}{2}\left(z_1+\frac{1}{z_1}\right)=\frac{1}{2}\left(z_2+\frac{1}{z_2}\right),$$

$$(z_1-z_2)\left(1-\frac{1}{z_1z_2}\right)=0,$$

所以 $$z_1=z_2 \quad 或 \quad z_1z_2=1.$$

因此儒可夫斯基函数在域D内是单叶的，其充要条件是D内不包含满足$z_1z_2=1$的两点z_1, z_2. 所以除去原点的单位圆内和单位圆外可以作为儒可夫斯基函数的单叶性域；上半平面、下半平面同样也可以作为它的单叶性域.

下面我们来考虑 $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$把单位圆内（去掉原点）与单位圆外变成什么域. 设

$$z=re^{i\theta}, \quad w=u+iv,$$

由(17)式得到

$$u=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta, \quad v=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta.$$

因此，z平面上的每个圆周 $|z|=r_0\neq0$都变为w平面上的一椭圆

$$u=\frac{1}{2}\left(r_0+\frac{1}{r_0}\right)\cos\theta, \qquad v=\frac{1}{2}\left(r_0-\frac{1}{r_0}\right)\sin\theta,$$

其半轴是$a=\frac{1}{2}\left(r_0+\frac{1}{r_0}\right)$, $b=\frac{1}{2}\left|r_0-\frac{1}{r_0}\right|$, 并且当$0<r_0<1$时，上半圆周映为下半椭圆，下半圆周映为上半椭圆；当$r_0>1$时，

上半圆周映为上半椭圆，下半圆周映为下半椭圆．对不同的r_0，$c=\sqrt{a^2-b^2}=1$，所以对应的椭圆是共焦的，焦点为±1（图2-11）．当$r_0\to1$时，$a\to1$，$b\to0$，椭圆"压缩"成为实轴上的线段：$[-1,1]$，当$r_0\to0$及$r_0\to+\infty$时，$a,b\to+\infty$．

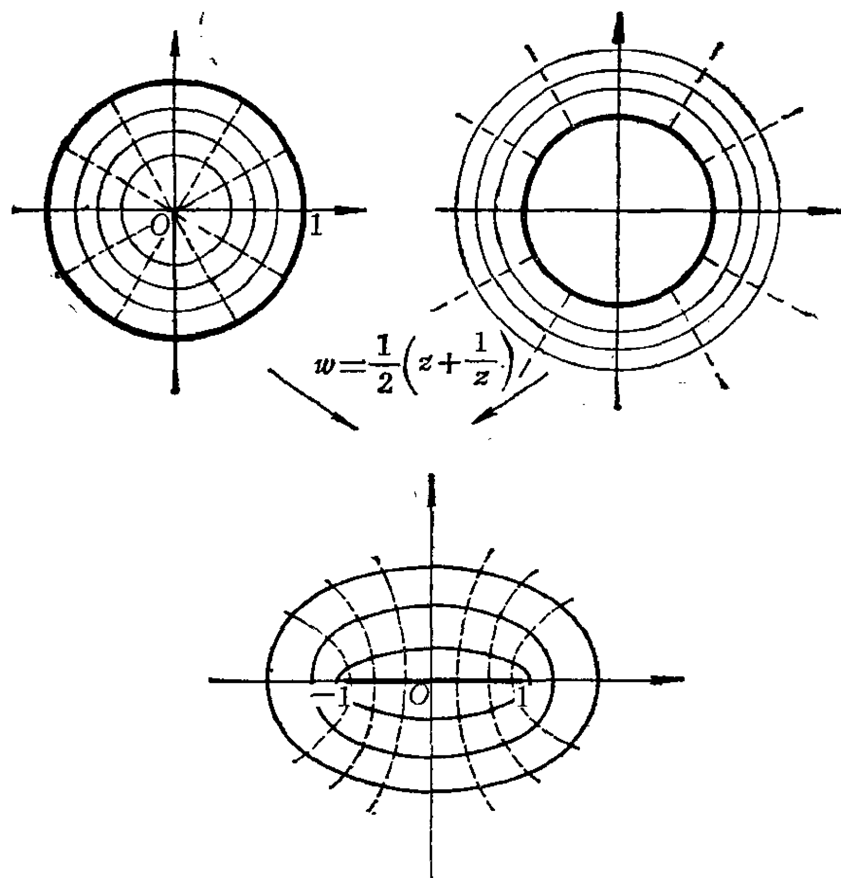


图 2-11

对应于z平面上的射线$\arg z=\theta_0$在w平面上是

$$u=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta_0,\quad v=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta_0,$$

这是双曲线的方程．当$\theta_0=0,2\pi$ 时，对应的是$\{u\geqslant1,v=0\}$；当$\theta_0=\pi$ 时，对应的是$\{u\leqslant-1,v=0\}$；当$\theta_0=\pi/2$，$3\pi/2$时，对应的是w平面上的虚轴．除此之外，对于不同的 θ_0，它们所对应的双曲线是共焦的，焦点为±1．

因此 $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$将单位圆内（去掉原点）和单位圆外

保角地映为w平面上去掉$[-1,1]$的域.

如果我们把上半平面作为$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$的单叶性域，那么根据上面的讨论，它把上半平面保角地映为除去实轴上$1\leqslant u<+\infty$和$-\infty<u\leqslant-1$的整个w平面(见图2-12). 同样，下半平面也是如此(见图2-13).

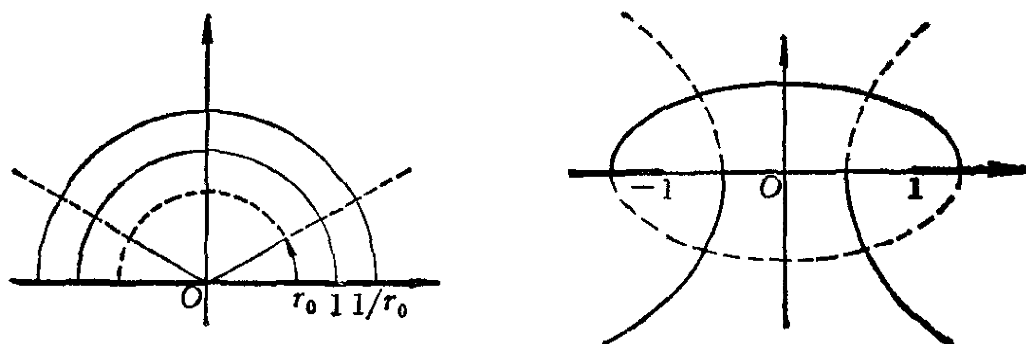


图 2-12

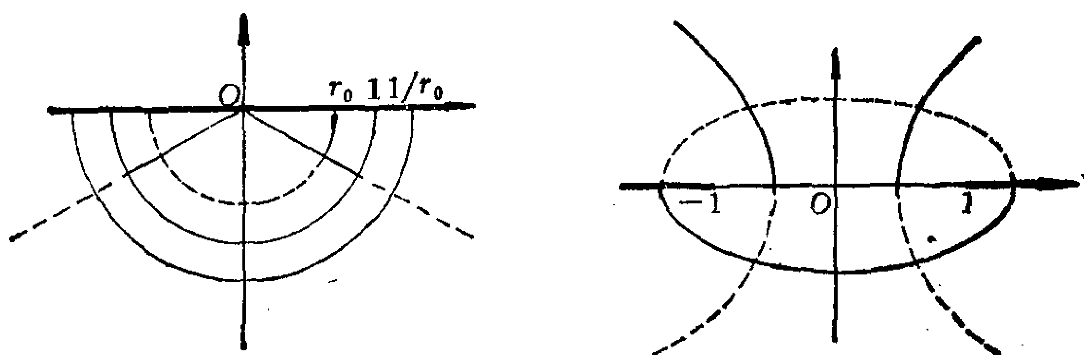


图 2-13

3. 三角函数

当x是实数时，由Euler公式

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x,\quad e^{-ix}=\cos x-i\sin x$$

可得

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i},\qquad \cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}.$$

当z是复数时，我们定义

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}. \tag{18}$$

这样定义的正弦函数和余弦函数，当 $z=x$ 时与数学分析中的 正弦和余弦函数是一致的.

现在我们来讨论三角函数的性质：

1） 由于指数函数在整个有穷平面上是解析的，所以$\sin z$，$\cos z$在有穷平面上解析，且

$$(\sin z)'=\cos z,\quad (\cos z)'=-\sin z. \tag{19}$$

2） 由于e^{iz}, e^{-iz}以2π 为周期，所以 $\sin z, \cos z$ 以2π为周期. 即

$$\sin(z+2\pi)=\sin z,\quad \cos(z+2\pi)=\cos z. \tag{20}$$

3） $\sin z$是奇函数，$\cos z$是偶函数. 即

$$\sin(-z)=-\sin z,\quad \cos(-z)=\cos z. \tag{21}$$

4） “和角”公式成立.

$$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2, \tag{22}$$

$$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2. \tag{23}$$

5） $\sin z$和$\cos z$的基本关系式

$$\sin^2 z+\cos^2 z=1. \tag{24}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\cos z. \tag{25}$$

以上性质都可由定义直接推出.请读者自己验证.

6） $|\sin z|$和$|\cos z|$是无界的.

设$z=x+iy$. 由4）

$$|\sin z|^2=|\sin x\cos(iy)+\sin(iy)\cos x|^2.$$

因为

$$\cos(iy)=\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}=\operatorname{ch} y,$$

$$\sin(iy)=\frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}=i\operatorname{sh}y,$$

所以

$$\begin{aligned}|\sin z|^2&=|\sin x\operatorname{ch}y+i\cos x\operatorname{sh}y|^2\\&=\sin^2x\operatorname{ch}^2y+\cos^2x\operatorname{sh}^2y\\&=\sin^2x\operatorname{ch}^2y+(1-\sin^2x)\operatorname{sh}^2y\\&=\operatorname{sh}^2y+\sin^2x(\operatorname{ch}^2y-\operatorname{sh}^2y).\end{aligned}$$

由于 $\operatorname{ch}^2y^2-\operatorname{sh}^2y=1$，所以

$$|\sin z|^2=\operatorname{sh}^2y+\sin^2x. \tag{26}$$

同理有

$$|\cos z|^2=\operatorname{ch}^2y-\sin^2x. \tag{27}$$

由此可见，复变数的正弦函数 $\sin z$和余弦函数 $\cos z$ 是无界的．比如在虚轴上 $z=iy$，$|\cos z|=\operatorname{ch}y$，$|\sin z|=\operatorname{sh}|y|$，都是无界函数．

7） $\sin z$ 仅在$z=k\pi$处为零，$\cos z$仅在 $z=\frac{\pi}{2}+k\pi$ 处为零，其中$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$．也就是说，$\sin z$，$\cos z$ 仅在它们作为实变数函数的零点处才为零，除此之外再也没有别的零点了．

事实上，

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{e^{2iz}-1}{2ie^{iz}}=0,$$

其充要条件是 $e^{2iz}=1$．这个方程的根是 $z=k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$．由 5） $\cos z=\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)$，$\cos z=0$，当且仅当$z=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$．

8） $\sin z$和 $\cos z$的单叶性域．

我们只考虑余弦函数 $w=\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$. 我们可以把它看作是下面三个函数的复合函数

$$z'=iz,\ \zeta=e^{z'},\ w=\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right).$$

第一个函数只是旋转映照，它处处是单叶的. 第二个函数单叶的充要条件为：在 z' 平面上的域不包含满足 $z'_1-z'_2=2k\pi i$（k 是不为零的整数）的两点 z'_1,z'_2，即在 z 平面上的域不包含 $z_1-z_2=2k\pi$ 的两点 z_1,z_2. 第三个函数单叶的充要条件是：在 ζ 平面上的域不包含满足 $\zeta_1\zeta_2=1$ 的两点 ζ_1 与 ζ_2. 在 z 平面上就是不包含满足条件 $e^{iz_1}\cdot e^{iz_2}=1$，即 $z_1+z_2=2k\pi$ 的两点 z_1,z_2. 因此带域 $0<\mathrm{Re}z<\pi$ 就可以作为 $\cos z$ 的单叶性域.

$z'=iz$ 把带域 $0<\mathrm{Re}z<\pi$ 单叶地映为带域 $0<\mathrm{Im}z'<\pi$. $\zeta=e^{z'}$ 又把后一带域单叶地映为上半平面 $\mathrm{Im}\zeta>0$. 最后 $w=\dfrac{1}{2}\left(\zeta+\dfrac{1}{\zeta}\right)$ 把这个上半平面单叶地映为除去实轴上 $-\infty<u\leqslant-1$ 和 $1\leqslant u<+\infty$ 的整个 w 平面(图2-14). 将这些函数复合得到 $w=\cos z$，它把带域 $0<\mathrm{Re}z<\pi$ 保角地映为 w 平面上去掉 $-\infty<u\leqslant-1$, $v=0$ 及 $1\leqslant u<+\infty$, $v=0$ 的域内.

对于正弦函数 $w=\sin z$ 可作类似的讨论.

正切函数 $\tan z$ 和余切函数 $\cot z$ 分别由下式定义

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z},\ \cot z=\frac{\cos z}{\sin z}. \tag{28}$$

这两个函数分别在去掉 $z=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ 的有穷平面上和去掉 $z=k\pi$ 的有穷平面上的域内是解析的，其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 其他的性质请读者列出并证明.

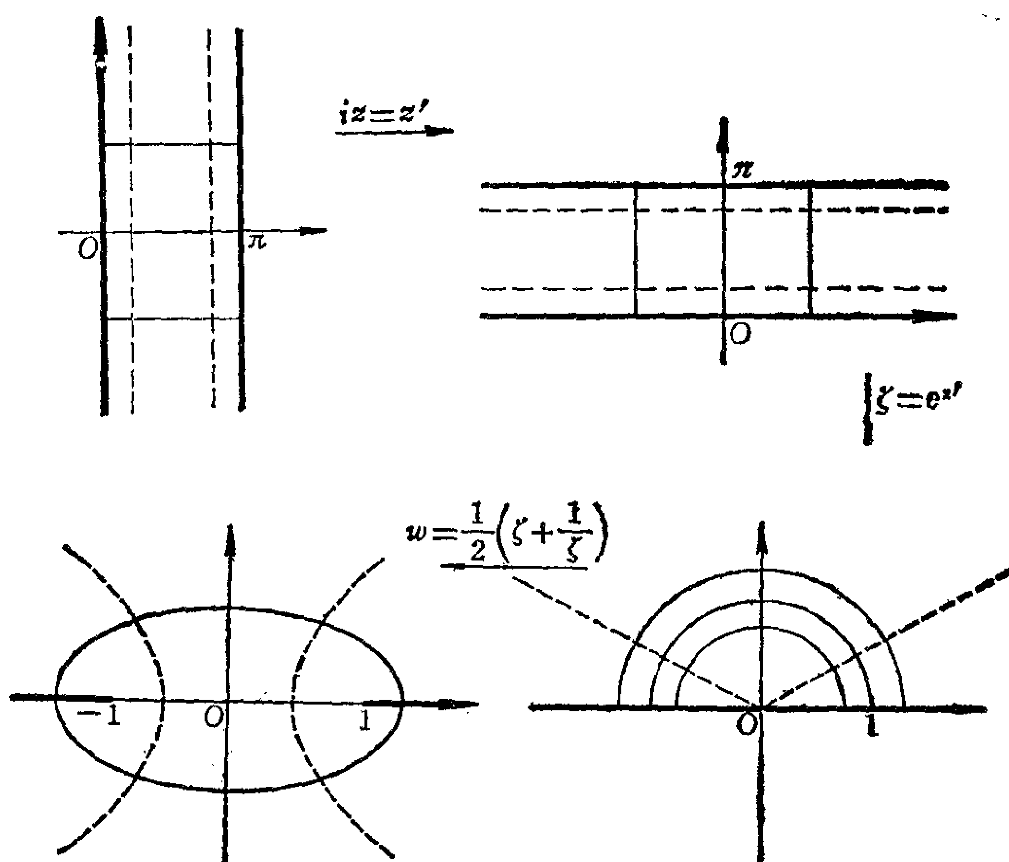


图　2-14

现在来研究$\tan z$的映照性质．由 $\sin z$，$\cos z$的定义

$$w=\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}=-i\ \frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}.$$

这个映照可以分解为下面三个映照的复合

$$z'=2iz,\ \ \zeta=e^{z'},\ \ w=-i\,\frac{\zeta-1}{\zeta+1}.$$

由此我们看出，$\tan z$在宽度为π的垂直带域内是单叶的．又由于$\tan z$是以 π 为周期的奇函数，所以只要对带域D：$0<\mathrm{Re}\,z<\dfrac{\pi}{2}$进行讨论．第一个映照$z'=iz$把$D$共形映照为$D'$：$0<\mathrm{Im}\,z'<\pi$；第二个映照$\zeta=e^{z'}$把$D'$共形映照为上半平面 H；第三个映照把H共形映照为右半平面（图2-15）．因此$w=\tan z$ 把带域$0<\mathrm{Re}\,z$

$<\dfrac{\pi}{2}$共形映照为右半平面.

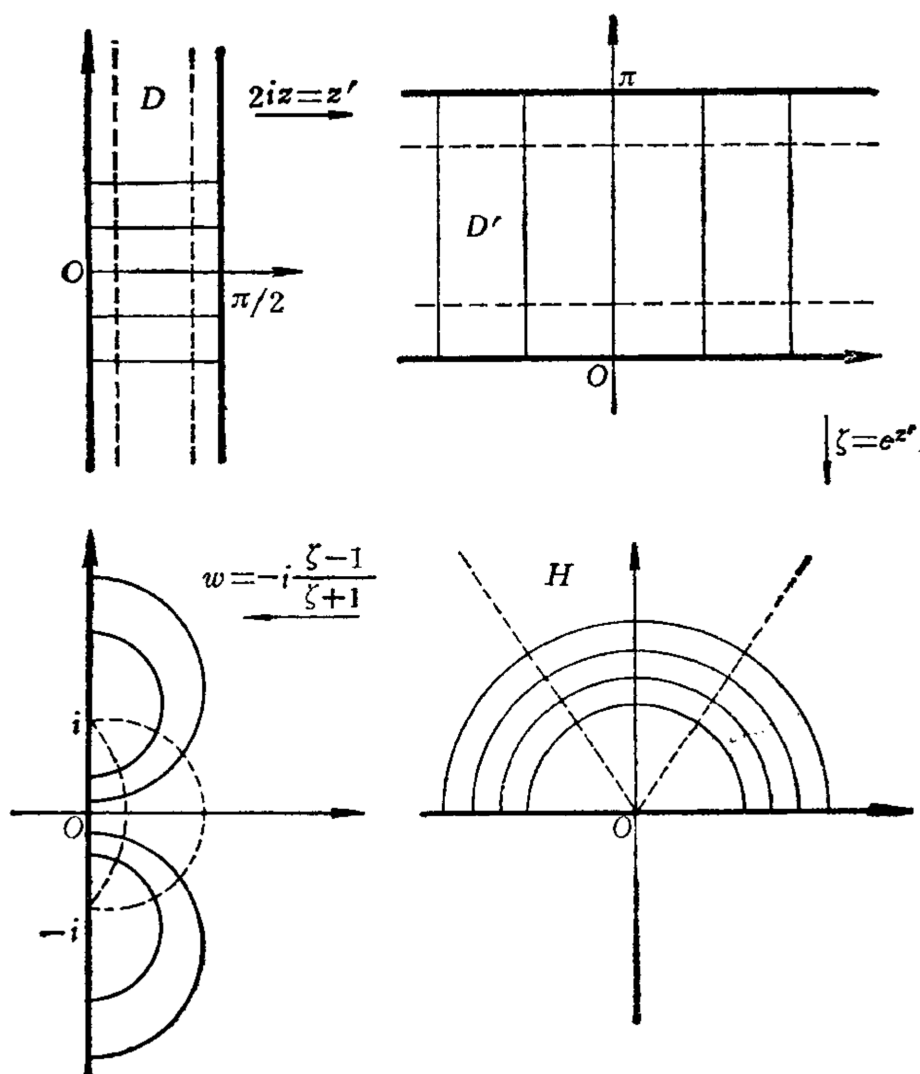


图 2-15

4. 对数函数

对数函数是指数函数的反函数,即对于$z\neq 0$,满足方程$e^w=z$的复数w称为z的对数.记作$\mathrm{Log}\,z$.显然由于指数函数的周期性,$\mathrm{Log}\,z$是(无穷)多值函数.若设$z=re^{i\theta}$, $w=u+iv$,那么

$$e^{u+iv}=re^{i\theta},$$

$$e^u=r,\ v=\theta+2k\pi,\ k\text{是整数}.$$

所以

$$w=\log r+(\theta+2k\pi)i$$

或

$$w=\mathrm{Log}z=\log|z|+i\mathrm{Arg}z. \tag{29}$$

与指数函数的性质(2)相应的性质为

$$\mathrm{Log}(z_1z_2)=\mathrm{Log}z_1+\mathrm{Log}z_2. \tag{30}$$

这个等式的意义和 $\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2$ 的意义相同.

根据前面对指数函数的讨论，若在域D: $\mathbf{C}-\{z;\ z\geqslant 0\}$，即在有穷平面$\mathbf{C}$上去掉正实轴的域内，$z$ 的幅角取主值 $0<\arg z<2\pi$，那么函数$w_k(z)=\log|z|+i(\arg z+2k\pi)$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$，把$D$单叶地映为平行于实轴的带域 E_k: $2k\pi<v<2(k+1)\pi$. 它们都是指数函数 $z=e^w$的反函数，并且在域D内 z 的模和幅角都是连续变化的，因此 $w_k(z)$在D内是连续的，根据上一节反函数的定理

$$w_k'(z)=\frac{1}{e^{w_k(z)}}=\frac{1}{z}. \tag{31}$$

我们把其中的$w_0(z)=\log|z|+i\arg z$称为 $\mathrm{Log}z$ 的主值(支)，记作$\log z$，即

$$\log z=\log|z|+i\arg z. \tag{32}$$

注意，有时为了方便起见，也可以将有穷平面上$\mathbf{C}$去掉负实轴作为上面讨论中的域D，这时取幅角的主值范围是 $-\pi<\arg z<\pi$，$w_k(z)$ 单叶解析地把 D 映为带形域 $(2k-1)\pi<v<(2k+1)\pi$. $\mathrm{Log}z$的主值(支)

$$\log z=\log|z|+i\arg z,\qquad -\pi<\arg z<\pi.$$

从以上的讨论，我们可看出，对数函数$\mathrm{Log}z=\log|z|+i\mathrm{Arg}z$是多值函数，其多值性在于幅角 $\mathrm{Arg}z$ 是多值的. 特别值得注意的是，我们上面所得到的 $w_k(z)(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$都是在去掉正实轴(或负实轴)的域 D 内解析(它们都是指数函数的反函数，

即满足 $e^{w_k(z)}=z$). 这里之所以要去掉正实轴(或负实轴), 是因为多值函数 $\mathrm{Arg}z$ 在这样的域内, 可以分出无穷多个单值连续分支$\arg z+2\pi k$ ($k=0, \pm1, \pm2, \cdots$); 并且在这样的域内不存在绕原点的简单闭曲线. 当点z从起始位置点 z_0沿D内的任意一条简单闭曲线绕一圈回到 z_0时, $\arg z$ 连续变化地回到原来的值, 相应的 $w_k(z)$ 在w平面也作出一条简单闭曲线(图2-16). 并且前面已经知道$w_k(z)$将D共形映照为宽度是 2π 的水平带域(这些带域连同它们的边界恰好覆盖整个w平面). 这就是说, 在D内我们可把多值函数 $\mathrm{Log}z$ 分成无穷多单值解析函数 $w_k(z)$, 称为它的(单值)解析分支,它们彼此相差$2\pi i$的整数倍.

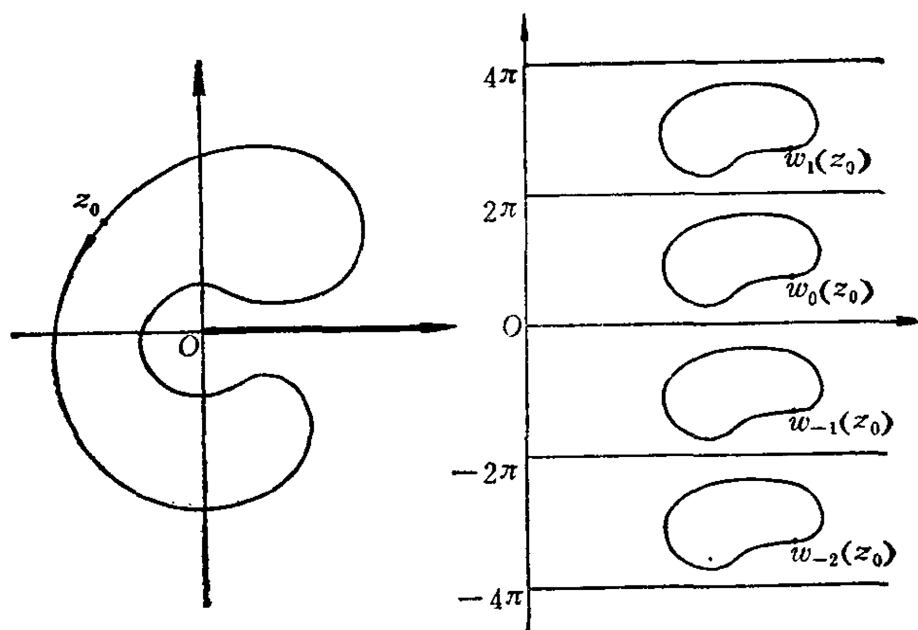


图 2-16

我们还可以用一条从原点出发并伸向无穷的曲线代替上面所说的正实轴(或负实轴). 因为在这样的域内, 同样不存在绕原点的简单闭曲线, 因而 $\mathrm{Arg}z$ 也可以分出它的单值连续分支. 上述的正实轴(或负实轴)或从原点出发并伸向无穷的曲线都称为割线. 通常为了便于表示出 $\mathrm{Log}z$ 的分支 $w_k(z)$, 一般地取正实轴或负实轴, 或者从原点出发的一条射线作为割线.

现在我们来考虑如果不取割线（即不割开z平面）将会出现什么情况．这时，D就是除去点$z=0$的z平面．在这种域内，存在绕原点$z=0$的简单闭曲线γ，当z从γ上的一点z_0沿γ绕一圈（反时针方向）回到z_0时，z的幅角得到增量2π，因此$w_k(z)$就得到增量$2\pi i$：$\Delta_\gamma\, w_k(z)=2\pi i$（它们的实部$\log|z|$显然是不变的），即$w_k(z)$从$w_k(z_0)$连续地变为$w_{k+1}(z_0)$而不再回到原来的值$w_k(z_0)$（图2-17）．因此，在这样的域内就不可能分出$\mathrm{Log}z$的单值解析分支．因这种缘故，我们把$z=0$称为$\mathrm{Log}z$的支点．一般地，具有这种性质的点，使得当$z$绕这点一圈时，多值函数从一个分支变为另一个分支，我们把它称为这个多值函数的支点．由于D内任意一条绕原点的简单闭曲线，我们同时可把它看作是绕$z=\infty$的简单闭曲线，因此$z=\infty$也是$\mathrm{Log}z$的支点．

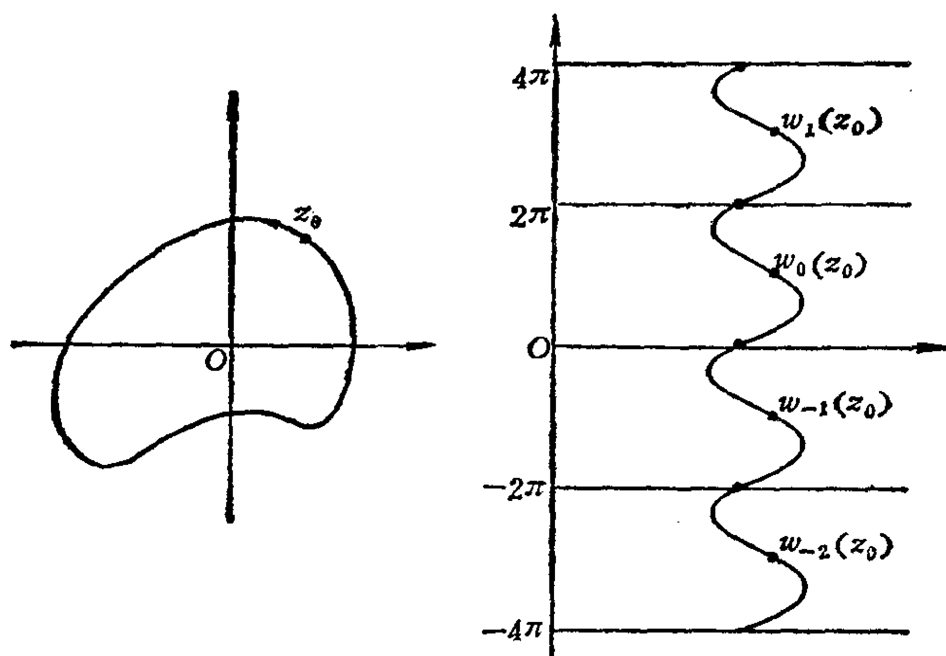


图 2-17

最后我们指出，$\mathrm{Log}z$的单值解析分支$w_k(z)$在割线上是不连续的．如果选取正实轴为割线，那么我们只能说$w_k(z)$从上半平面连续到割线的上边沿，从下半平面连续到割线的下边沿，并

且在前面我们已经知道，$w_k(z)$ 把割线的上边沿和下边沿分别变为水平带域的两条边线.

5. 幂函数

在前面的例子中，我们已经遇到 n 次幂函数z^n. 一般的幂函数$w=z^\alpha$我们定义为

$$w=z^\alpha=e^{\alpha \operatorname{Log} z} \tag{33}$$

其中α是一复常数.

设 $\alpha=a+ib$，按定义

$$\begin{aligned}z^\alpha&=e^{(a+ib)[\log|z|+i(\arg z+2k\pi)]}\\&=e^{a\log|z|-b(\arg z+2k\pi)}\\&\quad\times e^{i[b\log|z|+a(\arg z+2k\pi)]}.\end{aligned}$$

若记

$$\rho_k=e^{a\log|z|-b(\arg z+2k\pi)}$$
$$\theta_k=b\log|z|+a(\arg z+2k\pi)$$

则

$$w=z^\alpha=\rho_k e^{i\theta_k}, \quad |w|=\rho_k.$$

由此可见，若$b\neq 0$，则$w=z^\alpha$ 是无穷多值函数；若 $b=0$，即 α 是实数a，则

$$\begin{aligned}w=z^\alpha&=e^{a\log|z|}e^{i(\arg z+2k\pi)a}\\&=|z|^a e^{a(\arg z+2k\pi)i},\end{aligned}$$

z^α 的值都位于圆周上(注意：仅当α是实数 a时，$|z^\alpha|=|z|^a$)，幅角为$\theta_k=a(\arg z+2k\pi)$. 特别地，若 1）$\alpha=a=n$(整数)，$z^\alpha=z^n$是单值的；2）$\alpha=a=\frac{p}{q}$，$\frac{p}{q}$是既约分数，并且不妨设$0<p<q$，

$$z^\alpha=e^{\frac{p}{q}\log|z|}e^{i\frac{p}{q}(\arg z+2k\pi)}$$

$$= |z|^{\frac{p}{q}} e^{i\frac{p}{q}\arg z} e^{i\frac{p}{q}\cdot 2k\pi}.$$

由于 $\frac{p}{q}\cdot 2k\pi$ 仅当 $k=0,1,2,\cdots,q-1$时的q个值关于 2π 是不同余的，k取其他值时，其相应的值均与上述q个值中的某一个关于 2π 是同余的，所以对于给定的 z，z^{α} 只有q个不同的值；3）$\alpha=a$是无理数，

$$z^{\alpha}=|z|^{a}e^{ia\arg z}e^{2k\pi a i}.$$

由于 $2k\pi a$ 对于不同的 k 不可能关于 2π 是同余的（否则 a 就是有理数了），所以z^{α}是无穷多值函数.

总之，当α是整数时，z^{α}是单值的；当α是实的有理数时，z^{α}是有穷多值的；当α是其他情形时，z^{α}是无穷多值的. 按照定义，$z^{\alpha}=e^{\alpha \mathrm{Log} z}$是指数函数与 $\mathrm{Log}z$ 的复合函数，因此当α不是整数时，在 $\mathrm{Log}z$ 可以分出单值解析分支的域D内，z^{α}也可以分出它的单值解析分支. 设 $w_k(z)$ 是 $\mathrm{Log}z$ 在 D 内的单值解析分支，$w_k^*(z)$是z^{α}的单值解析分支. 按照定义

$$w_k^*(z)=e^{\alpha w_k(z)},$$

其中 $w_0^*(z)=e^{\alpha w_0(z)}=e^{\alpha \log z}$ 称为 z^{α} 的主值（支）. 因为 $w_{k+1}(z)$和$w_k(z)$相差 $2\pi i$，所以 $w_{k+1}^*(z)$和 $w_k^*(z)$ 相差因子 $e^{2\alpha\pi i}$. 因为

$$w_k'(z)=\frac{1}{z},$$

所以

$$(w_k^*(z))'=e^{\alpha w_k(z)}\alpha w_k'(z)=\alpha e^{(\alpha-1)w_k(z)}. \tag{34}$$

当α不是整数时，显然$z=0,\infty$是z^{α}的支点.

对于幂函数的映照性质，我们只讨论$\alpha>0$的情形. 设D是角域$0<\arg z<\theta_0$，这里θ_0满足条件

$$0<\theta_0\leqslant 2\pi,\quad 0<\alpha\theta_0\leqslant 2\pi.$$

由于$w^*_{k+1}(z)$和$w^*_k(z)$相差因子$e^{2\alpha\pi i}$，现在α是正实数，所以$w^*_{k+1}(z)$和$w^*_k(z)$相差是一个旋转．$w^*_k(z)$和$w^*_0(z)$相差也是一个旋转$e^{2k\pi i\alpha}$．这样，我们只要考虑$w^*_0(z)$就可以了．

$$w=w^*_0(z)=e^{\alpha\log z}=e^{\zeta},\quad \zeta=\alpha\log z.$$

我们已知$\zeta=\alpha\log z$把角域$0<\arg z<\theta_0$共形映照为带域$0<\operatorname{Im}\zeta<\alpha\theta_0$，$w=e^{\zeta}$又把这个带域共形映照为角域$0<\arg w<\alpha\theta_0$．因此，$w^*_0(z)$把开度为$\theta_0$的角域共形映照为开度等于$\alpha\theta_0$的角域（图2-18）．

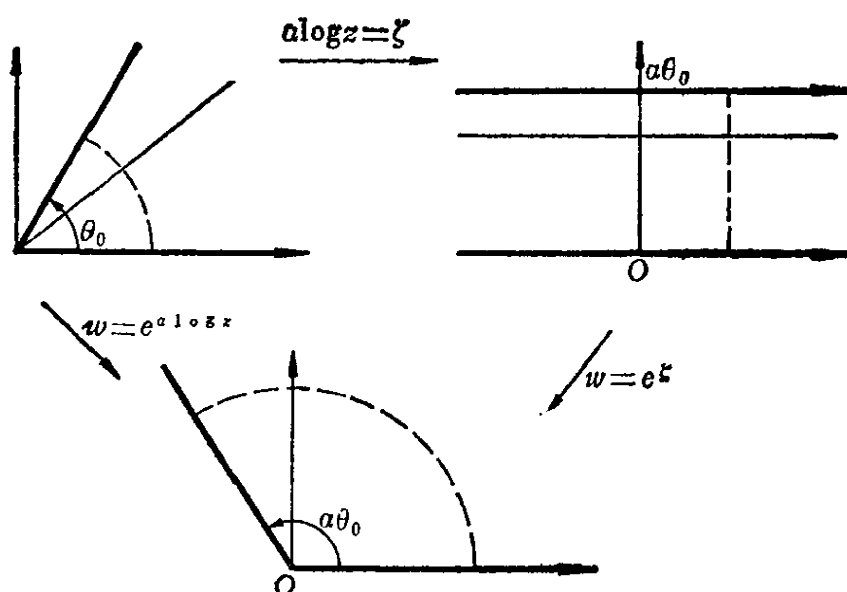


图 2-18

特别地，当$\alpha=n$（正整数）时，我们可取$\theta_0=\dfrac{2\pi}{n}$．这时$w=z^n$是单值的，它把角域$0<\arg z<\dfrac{2\pi}{n}$共形映照为角域$0<\arg w<2\pi$（图2-19）．当$\alpha=\dfrac{1}{n}$时可以取$\theta_0=2\pi$，$w=z^{\frac{1}{n}}$（或写为$\sqrt[n]{z}$，又称为根式函数）的n个单值解析分支．

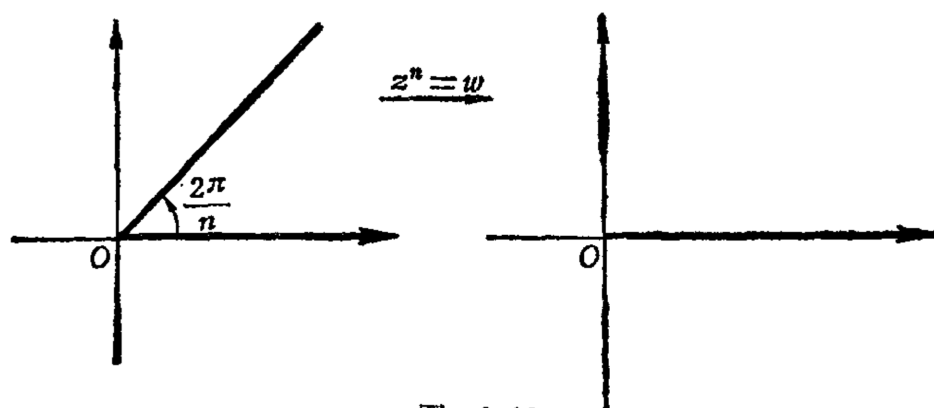


图 2-19

$$w=w_k^*(z)=\sqrt[n]{|z|}\ e^{\frac{\arg z+2\pi k}{n}i},$$

$$k=0,1,2,\cdots,n-1,$$

把去掉正实轴的 z 平面 $0<\arg z<2\pi$ 映照为 n 个角域

$$\frac{2k\pi}{n}<\arg w<\frac{2(k+1)\pi}{n}\quad(k=0,1,2,\cdots,n\text{-}1)\ (图2\text{-}20).$$

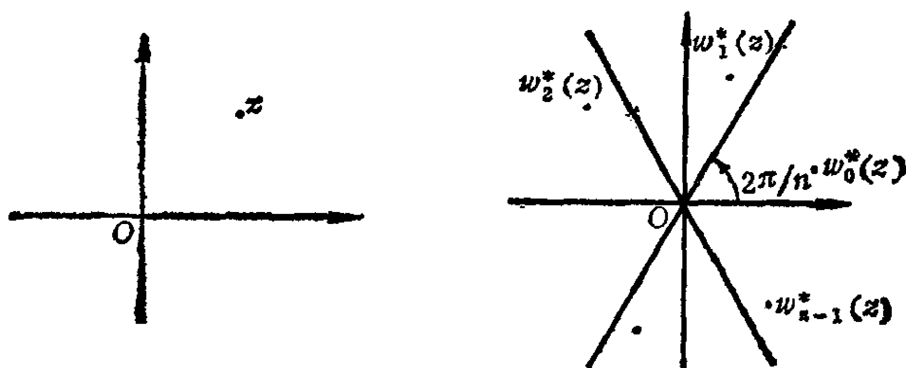


图 2-20

注意，如果不致于引起混淆，我们仍用z^a和$\sqrt[n]{z}$分别表示幂函数与根式函数的主值或特定的分支，而不再引用别的记号.

6. 儒可夫斯基函数的反函数与反三角函数

儒可夫斯基函数 $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$的反函数是

$$z=w+\sqrt{w^2-1}.$$

习惯上我们把它写成

$$w=z+\sqrt{z^2-1}. \tag{35}$$

由于$\sqrt{z^2-1}$是双值函数，所以(35)式也是一个双值函数．设$f_1(z)$，$f_2(z)$是$\sqrt{z^2-1}$的两个分支，则$f_1(z)$，$f_2(z)$对同一个z只相差一个符号，(35)式的两个分支乘积为1．又设

$$z-1=re^{i\theta}, \quad z+1=\rho e^{i\varphi},$$

γ是一条简单闭曲线，其内部包含点$z=1$而不包含点$z=-1$．当z从z_0沿γ绕一圈时（图2-21），r,ρ，φ仍回到原来的值，但是θ却得到增量2π．因此$\sqrt{z^2-1}$与原来的值相差一个符号，即$f_1(z_0)$变为$f_2(z_0)$，$f_2(z_0)$变为$f_1(z_0)$．因此函数(35)的两个分支：$z+f_1(z)$，$z+f_2(z)$，也从一个分支变为另一分支，所以$z=1$是双值函数(35)的一个支点．同理$z=-1$也是它的一个支点．

现在设γ_1是其内部同时包含点$z=1$和点$z=-1$的简单闭曲线．当z从z_0沿γ_1绕一圈时（图2-22），r,ρ仍回到原来的值，

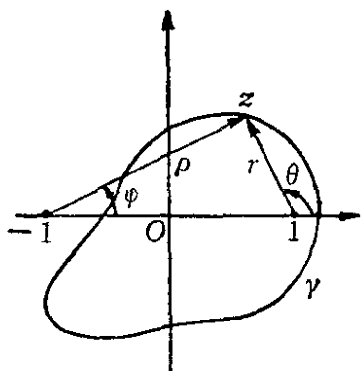


图 2-21

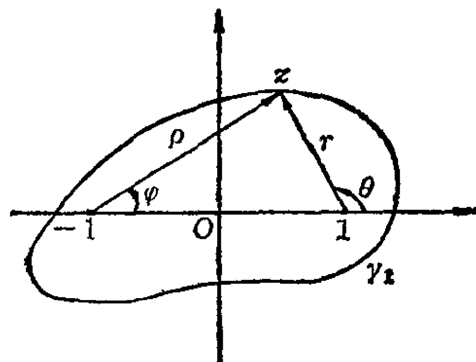


图 2-22

θ和φ都得到增量2π，因此$\sqrt{z^2-1}$的两个分支$f_1(z)$，$f_2(z)$仍回到原来的值，这样一来$z=\infty$就不是函数(35)的支点.

于是函数(35)仅以$z=\pm1$为支点，在没有单独绕点$z=-1$和单独绕点$z=1$的简单闭曲线的域内，双值函数(35)都可以分出它的两个单值解析分支. 因此取连接支点$z=-1$和支点$z=1$的线段$[-1,1]$作为割线的域D，就是函数(35)可以分出两个单值解析分支的"最大"域. 根据前面对儒可夫斯基函数的讨论，我们知道，这两个分支分别把D共形映为$0<|w|<1$和$1<|w|<+\infty$. 同样，如果取域的割线为实轴上$-\infty<x\leqslant-1$和$1\leqslant x<+\infty$，那么函数(35)同样可以分出两个单值解析分支，它们把这个域分别共形映照为上半平面和下半平面.

余弦函数$w=\cos z$的反函数

考虑方程

$$\cos z=w.$$

从中解出z

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=w,$$

$$e^{iz}=w+\sqrt{w^2-1},$$

$$z=-i\,\mathrm{Log}\left(w+\sqrt{w^2-1}\right).$$

如果沿用数学分析中的记号，将反余弦函数记作$z=\mathrm{Arc}\cos w$，那么

$$z=\mathrm{Arc}\cos w=-i\,\mathrm{Log}\left(w+\sqrt{w^2-1}\right).$$

习惯上我们写成

$$w=\mathrm{Arc}\cos z=-i\,\mathrm{Log}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right). \qquad (36)$$

它是对数函数与儒可夫斯基函数的反函数的复合函数，也是一个

无穷多值函数．对于每一个z，相应有无穷多个w的值，它们或者相差一个符号或者相差2π的整数倍．因为$z=\pm1$是$z+\sqrt{z^2-1}$的支点，所以$z=\pm1$也是函数(36)的支点．值得注意的是$z=\infty$也是函数(36)的支点．因为当z从z_0沿γ_1绕一圈时$z+\sqrt{z^2-1}$的幅角得到增量2π，因此$-i\,\mathrm{Log}\,(z+\sqrt{z^2-1})$在$\gamma_1$上得到增量$2\pi$，即从一个分支变为另一分支，故$z=\infty$是它的支点．正因为$z=\infty$是 Arc cos z的支点，所以必须取从$z=-1$和$z=1$出发并伸向无穷的曲线作为割线．特别地，可取割线为实轴上的$-\infty<x\leqslant-1$和$+1\leqslant x<+\infty$．在具有这种割线的域D内，$z+\sqrt{z^2-1}$的两个单值解析分支把D共形映照为上半平面和下半平面；Arc cos z的各分支将D共形映照为宽度为π的垂直带域(图2-23)．

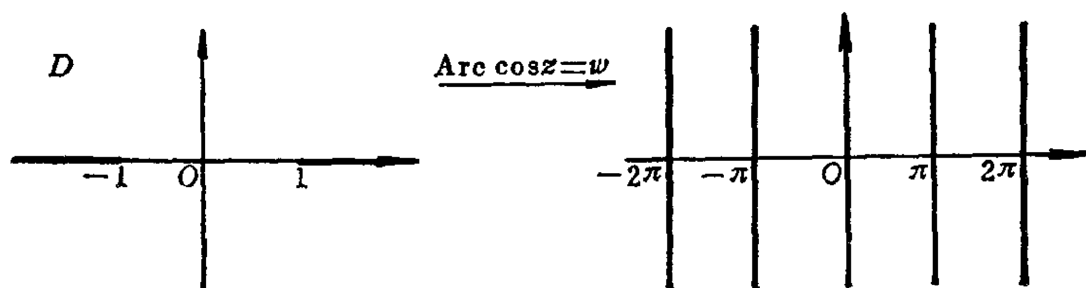


图 2-23

正弦函数的反函数$w=\mathrm{Arc\,sin}z$

由于$\sin\left(\frac{\pi}{2}-w\right)=\cos w$，我们得到

$$w=\mathrm{Arc\ sin}\ z=\frac{\pi}{2}+i\mathrm{Log}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right).\qquad(37)$$

正切函数$w=\tan z$的反函数

由方程

$$w=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})}=\frac{1}{i}\quad\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}$$

解出z

$$e^{2iz}=\frac{1+iw}{1-iw}=\frac{i-w}{i+w},$$

$$z=\frac{1}{2i}\text{Log}\left(\frac{i-w}{i+w}\right).$$

记作

$$z=\text{Arc }\tan w=\frac{1}{2i}\ \text{Log}\left(\frac{i-w}{i+w}\right).$$

习惯上写成

$$w=\text{Arc tan } z=\frac{1}{2i}\ \text{Log}\left(\frac{i-z}{i+z}\right). \tag{38}$$

这也是一个无穷多值函数．对于每个$z\neq\pm i$的值，它有无穷多个相差π的值与之对应．容易看出，$z=\pm i$是它的支点．事实上，若γ是其内部包含点$z=i$而不包含点$z=-i$的简单闭曲线（图2-24），则当z从z_0沿γ绕一圈时，$z-i=re^{i\theta}$的幅角得到增量2π，因此$\frac{1}{2i}\text{Log}\left(\frac{i-z}{i+z}\right)$在$\gamma$上有增量$\pi$，即从它的一个分支变为另一分支，所以$z=i$是它的支点．同理$z=-i$也是它的支点．但是$z=\infty$不是函数（36）的支点．事实上，如果$\gamma_1$是其内部同时包含点$z=\pm i$的简单闭曲线（图2-25），那么当$z$从$z_0$沿$\gamma_1$绕一圈时，$z-1=re^{i\theta}$的幅角$\theta$与$z+i=\rho e^{i\varphi}$的幅角$\varphi$得到增量$2\pi$，因此$\text{Log}\left(\frac{i-z}{i+z}\right)$在$\gamma_1$上的增量仍为零，即$w$仍回到原来的位置，所以$z=\infty$不是Arc tan$z$的支点．

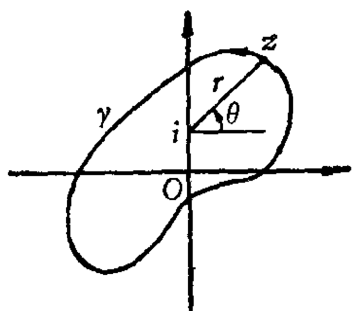


图 2-24

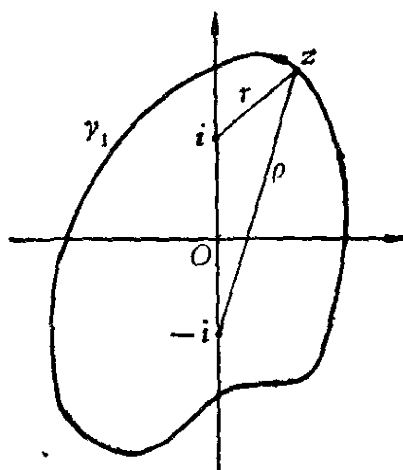


图 2-25

现在我们可以在没有单独绕点 $z=-i$ 和单独绕点 $z=i$ 的简单闭曲线的域内分出 Arc tan$z$ 的单值解析分支，比如在右半平面D内，Arc tan$z$ 可以分出它的单值解析分支．设

$$\zeta=\frac{i-z}{i+z}.$$

它在D内是单叶解析的（唯一不解析的点$z=-i$不在D内）．它将右半平面D共形映照为上半平面H，而

$$w=\text{Arc}\tan z=\frac{1}{2i}\text{Log}\,\zeta$$

把ζ平面上的上半平面 H 共形映照为宽度为$\frac{\pi}{2}$的垂直带域 E_k（图2-26）．类似地，若取左半平面作为 D，则$w=\text{Arc}\tan z$ 的各分支把D共形映照为垂直带域$\frac{\pi}{2}+k\pi<\text{Re}w<(k+1)\pi$.

如果取虚轴上连接 i 和 $-i$ 的线段$[-i,i]$作为割线，即$D=\mathbf{C}-[-i,i]$，那么$\zeta=\frac{i-z}{i+z}$把D共形映为去掉正实轴的ζ平面，然

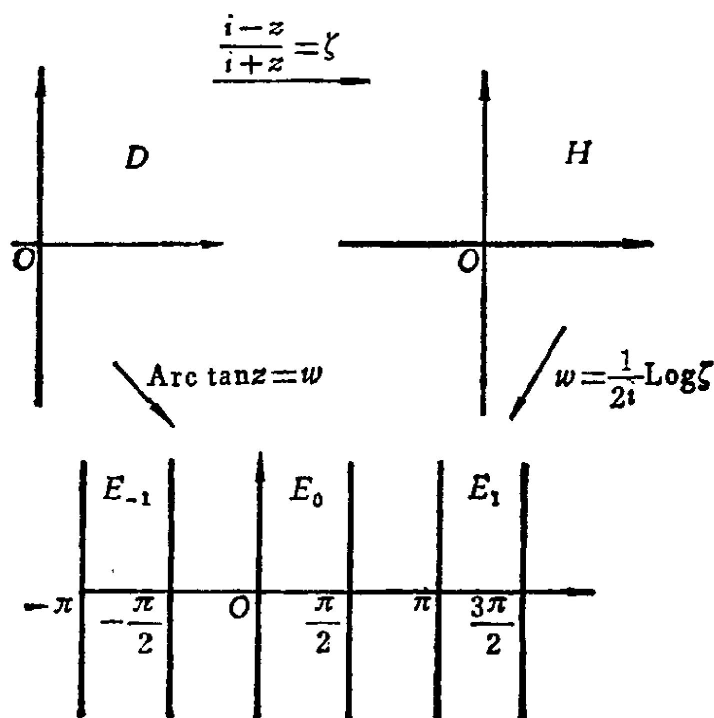


图 2-26

后 $w=\frac{1}{2i}\text{Log}\zeta$的各分支把它映照为带域 $k\pi<\text{Re}w<(k+1)\pi$.

这时$z=\infty$变为ζ平面上的点$\zeta=-1$，然后$\frac{1}{2i}\text{Log}\zeta$把点 $\zeta=-1$

变为 $w=\frac{\pi}{2}+k\pi$，因此 Arc tan$z$ 将$z=\infty$变为$\frac{\pi}{2}+k\pi$.

7. 初等多值函数的其他例子

前面已经说过，我们的研究对象是单值解析函数，但是由于幅角的多值性，不可避免地要涉及到某些初等多值函数，如本节讨论过的对数函数等. 下面再给出几个由对数函数复合得到的多值函数.

例 1 $w=\text{Log}(z-a)$，a是复常数.

显然，这是一个多值函数，$z=a$，$z=\infty$是它的支点．在z平面上取一条从 a 出发并伸向无穷的简单曲线为割线(图2-27)，在以这条割线为边界的域内，$\mathrm{Log}(z-a)$可以分出无穷多个单值解析分支．

例2 $w=f(z)=\mathrm{Log}(z-a)(z-b)$，其中 a，b 是不相同的复常数．

设γ是其内部包含a点而不包含b点的简单闭曲线（图2-28）．当 z沿γ 绕一圈时，$z-a$ 的幅角得到增量 2π，$z-a$ 的模，以及$z-b$的模和幅角仍回到原来的值，因此

$$\Delta_{\gamma} f(z)=2\pi i,$$

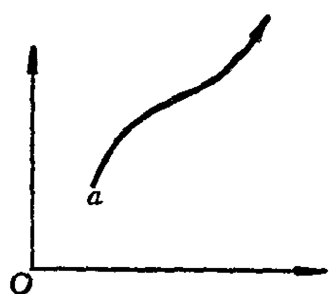


图 2-27

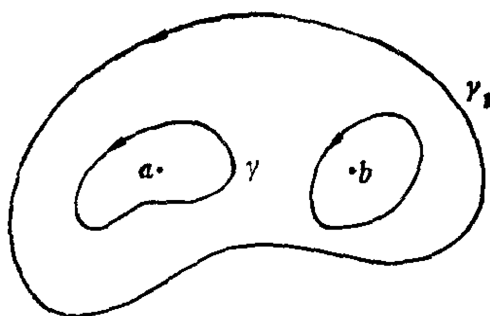


图 2-28

即$f(z)$从一个分支变为另一分支（因为对数函数的不同分支只相差 $2\pi i$ 的整数倍），$z=a$是$f(z)$的一个支点．同理$z=b$也是$f(z)$的支点．

如果γ_1是同时绕a与b的简单闭曲线，容易看出$z-a$，$z-b$的幅角都得到增量2π，因此

$$\Delta_{\gamma_1} f(z)=4\pi i,$$

所以$z=\infty$也是$f(z)$的支点．

因为$z=\infty$是多值函数$f(z)$的支点，所以在可以分出$f(z)$单值解析分支的域内不能有绕 $z=\infty$ 的曲线，这就是说割线必须伸向无穷．当然由于 a 与 b 都是支点，所以这个域内也不能有绕 a

点和绕 b 点的曲线存在，比如在具有图2-29或图2-30所示的割线的域内，$f(z)$都可以分出单值解析分支.

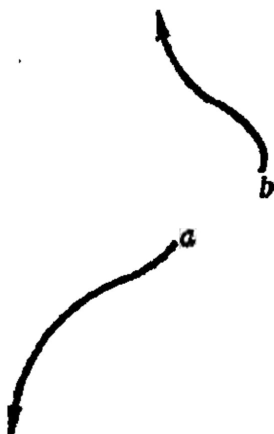


图 2-29

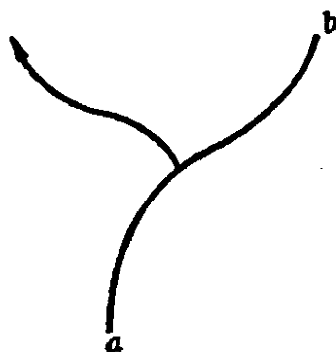


图 2-30

类似地，若$w=f(z)=\mathrm{Log}(z-a)(z-b)(z-c)$，其中$a,b,c$是彼此不相同的复常数，则 a，b，c，∞是它的支点. 在没有绕这四点中任何一点的曲线的域内，$f(z)$可以分出无穷多个单值解析分支. 在具有图 2-31，图 2-32，图 2-33 所示的割线的域内，$f(z)$ 都可分出无穷多个单值解析分支.

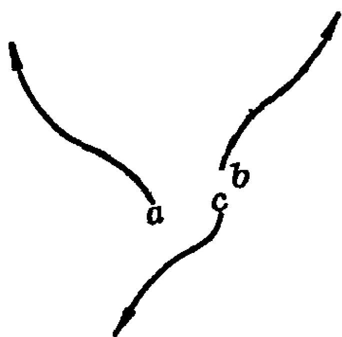


图 2-31

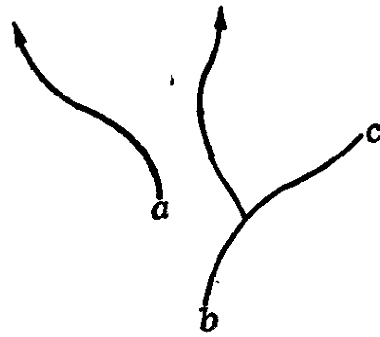


图 2-32

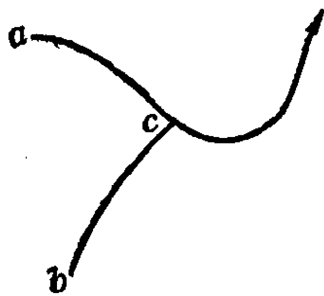


图 2-33

例3 $w=f(z)=\mathrm{Log}\dfrac{z-a}{z-b}$，$a,b$是不同的复常数.

前面在讨论$\mathrm{Arc\ tan}z$时，我们已遇到过这种多值函数. 容易看出，a 与 b 都是$f(z)$的支点，但∞不是$f(z)$的支点. 因此在没

有单独绕 a 点和单独绕 b 点的简单闭曲线的域内，$f(z)$可以分出无穷多个单值解析分支．

由例 2 和例 3 可以看出，当 $P(z)$和$R(z)$分别是多项式和有理函数时，我们对$\mathrm{Log}P(z)$与$\mathrm{Log}R(z)$可作类似的讨论．

例4 $w=f(z)=(z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta}$，其中$a$，$b$是不同的复常数，$\alpha,\beta$是不为整数的实常数．

设$z-a=re^{i\theta}$，$z-b=\rho e^{i\varphi}$，按照定义有

$$\begin{aligned}f(z)&=(z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta}=e^{\alpha\mathrm{Log}(z-a)+\beta\mathrm{Log}(z-b)}\\&=e^{\alpha[\log r+i(\theta+2k\pi)]+\beta[\log\rho+i(\varphi+2l\pi)]}\\&=r^{\alpha}\rho^{\beta}e^{(\alpha\theta+\beta\varphi)i}e^{(2\alpha k\pi+2l\pi\beta)i}.\end{aligned}$$

因此对于不同的分支，$f(z)$的值相差因子$e^{(2k\alpha+2l\beta)\pi i}$．

设 γ 是其内部包含点$z=a$但不包含点$z=b$ 的简单闭曲线，$g(z)=\alpha\mathrm{Log}(z-a)+\beta\mathrm{Log}(z-b)$．容易看出

$$\Delta_{\gamma}g(z)=2\pi i\alpha.$$

因为α不是整数，所以当z沿γ绕行一圈时，$f(z)$从一个分支变为另一分支，$z=a$是$f(z)$的支点．同理$z=b$也是$f(z)$的支点．

现在若γ_1是其内部同时包含点a,b的简单闭曲线，则

$$\Delta_{\gamma_1}g(z)=(\alpha+\beta)\cdot 2\pi i.$$

于是，当$\alpha+\beta$等于整数时，$z=\infty$不是$f(z)$的支点；当$\alpha+\beta$不等于整数时，$z=\infty$是$f(z)$的支点．在前一种情形，我们可以取割线为连接a与b的简单曲线，在具有这种割线的域内 $f(z)$ 可以分出无穷多个解析分支．在后一种情形，我们可以取分别由a,b到∞连接起来的简单曲线作为割线．

现在我们来研究以下具体的例子：

$$f(z)=\sqrt{\frac{(1-z)^3}{z}}\cdot\frac{1}{z+1}.$$

$z=0$，$z=1$是它的两个支点．$z=\infty$不是支点，因为当z沿其内部同时包含0与1的简单闭曲线一圈时，$z^{-1/2}$ 的幅角增量为 $-\pi$，（1

$-z)^{3/2}$的幅角增量为 $\frac{3}{2}\cdot 2\pi=3\pi$，因此$\sqrt{\frac{(1-z)^3}{z}}$沿这条曲线上的增量为 2π。我们可取线段[0,1]作为割线，在 z 平面上去掉线段[0,1]的域内，$\sqrt{\frac{(1-z)^3}{z}}$可分出两个单值解析分支。现在我们选定$f(z)$的一个分支$f_0(z)$如下：规定在(0,1)的上边沿 Ⅰ，$\theta=\arg z=0$，$\varphi=\arg(1-z)=0$，因此对(0,1)上边沿的点z有

$$f_0(z)=\sqrt{\frac{(1-x)^3}{x}}\cdot\frac{1}{x+1}.$$

当 Ⅰ 上的点$z=x>0$沿着绕过右端点$z=1$的闭曲线回到下边沿 Ⅱ 上具有相同坐标 x 的点时(图2-34)

$$\theta=\arg z=0,\qquad \varphi=\arg(1-z)=-2\pi.$$

显然 z 和 $1-z$ 的模分别回到原来的值 x 和 $1-x$，所以在 Ⅱ 上有

$$f_0(z)=\sqrt{\frac{(1-x)^3}{x}}\cdot\frac{e^{-2\pi i(3/2)}}{x+1}$$

$$=-\sqrt{\frac{(1-x)^3}{x}}\cdot\frac{1}{x+1}.$$

我们也可以让 z 从 Ⅰ 上的 x 绕过割线的左端点回到 Ⅱ 上的 x（图2-35），这时

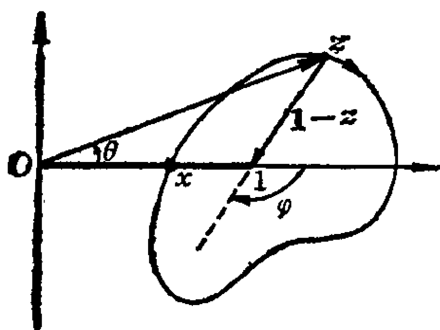


图 2-34

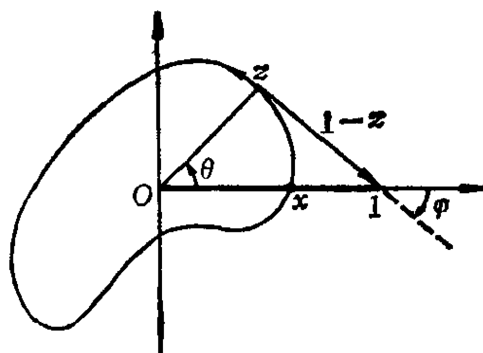


图 2-35

$$\theta=\arg z=2\pi,\qquad \varphi=\arg(1-z)=0,$$

即θ得到增量2π，所以在Ⅰ上$z=x$处，

$$f_0(z)=\sqrt{\frac{(1-x)^3}{x}}\cdot\frac{e^{2\pi i(-1/2)}}{x+1}$$

$$=-\sqrt{\frac{(1-x)^3}{x}}\cdot\frac{1}{x+1}.$$

现在我们来求$f_0(z)$在点$z=-i$的值$f_0(-i)$.在点$z=-i$处

$$\arg z=-\frac{\pi}{2},\qquad \arg(1-z)=-\frac{7\pi}{4},$$

如果z是从上边沿Ⅰ绕过右端点$z=1$到点$z=-i$；或者

$$\arg z=\frac{3\pi}{2},\qquad \arg(1-z)=\frac{\pi}{4},$$

如果z是从上边沿Ⅰ绕过左端点$z=0$到$z=-i$. 因此，总有

$$f_0(-i)=2^{\frac{3}{4}}e^{-\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}i\right)}e^{\frac{3}{2}\left(-\frac{7}{4}\pi i\right)}\frac{1}{1-i}$$

$$=\frac{2^{\frac{3}{4}}e^{-\frac{3\pi}{8}i}}{1-i}=2^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{\pi i}{8}}.$$

习　　题

1. 求$|e^{z^2}|$，$|e^{2z+3i}|$.
2. 验证$\sin(iz)=i\operatorname{sh}z$，$\cos(iz)=\operatorname{ch}z$.
3. 证明若$|z|\leqslant R$，则$|\sin z|\leqslant\operatorname{ch}R$，$|\cos z|\leqslant\operatorname{ch}R$.
4. 验证$\overline{\sin z}=\sin\bar{z}$，$\overline{\cos z}=\cos\bar{z}$.
5. 证明

$$(1+i)\cot(\alpha+i\beta)+(1-i)\cot(\alpha-i\beta)$$

$$=2\,\frac{\sin2\alpha+\operatorname{sh}2\beta}{\operatorname{ch}2\beta-\cos2\alpha}.$$

6. 证明函数 $f(z)=z^2+2z+3$ 在单位圆 $|z|<1$ 内是单叶的.

7. 求下列曲线在给定映照下的象:

(1) 直线$x=a$,直线$y=b$,圆周$\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$,$f(z)=\frac{1}{z}$;

(2) 直线$x=\alpha$与直线$y=\beta$, $f(z)=z^2$;

(3) 圆周 $|z|=1$, $f(z)=\sqrt{z+1}$.

8. 求下列函数的值:

$$\cos(2+i),\quad 1^i,\quad i^i,\quad \mathrm{Log}(2-3i),$$

$$\mathrm{Arc}\cos\frac{1}{4}(3+i),\quad \mathrm{Arc}\tan(1+2i).$$

9. 设下列函数$f(z)$在$z=2$时的幅角为零,求当z从 2 出发绕以原点为中心的圆周回到 2 时(反时针方向)$f(z)$的幅角.

(1) $f(z)=\sqrt{z-1}$; (2) $f(z)=\sqrt[3]{z-1}$;

(3) $f(z)=\sqrt{z^2-1}$; (4) $f(z)=\sqrt{z^2+2z-3}$;

(5) $f(z)=\sqrt{\dfrac{z-1}{z+1}}$.

10. 设$f(z)=(1-z)^{-\alpha}z^{\alpha-1}$ $(0<\alpha<1)$. 求$f(z)$分别沿曲线

$$\gamma_1(t)=\frac{1}{2}e^{it},\qquad 0\leqslant t\leqslant 2\pi;$$

$$\gamma_2(t)=1+\frac{1}{2}e^{it},\qquad 0\leqslant t\leqslant 2\pi;$$

$$\gamma_3(t)=2e^{it},\qquad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

的增量,问在怎样的域内$f(z)$可以分出单值解析分支?

11. 求下列多值函数的支点．这些多值函数在怎样的域内可以分出单值解析分支？

(1) $f(z)=\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)\cdots(z-a_n)}$,

$a_1,a_2,\cdots,a_n$互不相同，$n>2$；

(2) $f(z)=\sqrt[3]{\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)}$,

$a_1,a_2,\cdots,a_n$互不相同，$n\geqslant 3$；

(3) $f(z)=\sqrt{\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}}$;

(4) $f(z)=\mathrm{Log}\dfrac{(z-a)(z-b)}{z-c}$, a,b,c互不相同．

12. 证明函数 $\mathrm{Log}(1-z^2)$ 在 z 平面上去掉线段$[-1,i]$, $[1,i]$及射线$x=0$, $y\geqslant 1$ 的域D内可以分出单值解析分支．求出当$z=0$时取零值的那个分支在$z=2$的值．

13. 证明多值函数$f(z)=\sqrt[4]{(1-z)^3(1+z)}$在去掉$[-1,1]$的 z 平面上可以分出四个单值解析分支．求函数在$(-1,1)$的上边沿为正的那个分支在点 $z=\pm i$ 的值．

第三章 Cauchy定理与Cauchy 公式

这一章我们要引进积分的概念，叙述并证明关于解析函数积分的Cauchy定理，这个著名定理是整个解析函数理论的基础.

§1 积 分

设$\gamma(t)$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$是C上的一条可求长曲线①，又函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)(z=x+iy)$在$\gamma$上有定义，沿$\gamma(t)$取分点$z_0=a,z_1,z_2,\cdots,z_n=b$. 在$\gamma(t)$上，从$z_{k-1}$到$z_k$的一小段$\gamma_k$上任取一点$\zeta_k=\xi_k+i\eta_k$(图3-1)，作和数

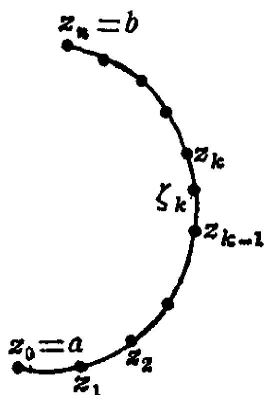


图 3-1

$$S=\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)(z_k-z_{k-1}).$$

如果当$\lambda=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}s_k$($s_k$是$\gamma_k$的弧长) 趋于零时，和数$S$趋于一极限值，那么这个极限值称为$f(z)$沿曲线$\gamma(t)$的积分，记作$\int_\gamma f(z)dz$，即

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)(z_k-z_{k-1}). \tag{1}$$

假定函数$f(z)$在$\gamma(t)$上连续，那么上述极限一定存在. 实际

---

① 这里，我们理解曲线的方向为参数t增加的方向，起点为$a=\gamma(\alpha)$，终点为$b=\gamma(\beta)$.

上，我们可以把上面的和数化为关于$f(z)$的实部与虚部的和数．若设$z_k=x_k+iy_k$，$\zeta_k=\xi_k+i\eta_k$，$f(\zeta_k)=u(\xi_k,\eta_k)+iv(\xi_k,\eta_k)$，则

$$S=\sum_{k=1}^{n}\{u(\xi_k,\eta_k)(x_k-x_{k-1})-v(\xi_k,\eta_k)(y_k-y_{k-1})\}$$

$$+i\sum_{k=1}^{n}\{v(\xi_k,\eta_k)(x_k-x_{k-1})$$

$$+u(\xi_k,\eta_k)(y_k-y_{k-1})\}.$$

当$\lambda\to0$时，右端的实部和虚部分别趋于曲线积分$\int_\gamma udx-vdy$和$\int_\gamma vdx+udy$，即

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_\gamma udx-vdy+i\int_\gamma vdx+udy. \qquad (2)$$

特别地，如果$\gamma(t)$是实轴上的线段$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$，这时$f(z)$是实变数$t$的连续复函数，$f(t)=u(t)+iv(t)$．于是

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt=\int_\alpha^\beta u(t)dt+i\int_\alpha^\beta v(t)dt. \qquad (2')$$

假如$\gamma(t)=x(t)+iy(t)$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$是光滑的(实际上，这正是我们经常遇到的情形)，那么

$$\int_\gamma udx-vdy=\int_\alpha^\beta\{u(x(t),y(t))x'(t)$$

$$-v(x(t),y(t))y'(t)\}dt,$$

$$\int_\gamma vdx+udy=\int_\alpha^\beta\{v(x(t),y(t))x'(t)$$

$$+u(x(t),y(t))y'(t)\}dt.$$

上面的第二式乘以i与第一式相加，化简后得到

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[\gamma(t)]\gamma'(t)dt\text{①}. \tag{3}$$

这表明我们可以把$f(z)$沿曲线γ的积分化为$f(z)$关于曲线γ的参数t的定积分.

由积分的定义，可以立即推出下列性质：

1) $\int_{\gamma^{-1}} f(z)dz = -\int_{\gamma} f(z)dz$;

2) $\int_{\gamma} [f(z)+g(z)]\, dz = \int_{\gamma} f(z)dz + \int_{\gamma} g(z)\, dz$;

3) $\int_{\gamma} af(z)dz = a\int_{\gamma} f(z)dz$，$a$是任一复常数；

4) 如果γ是由γ_1和γ_2所组成，则

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz;$$

5) $$\left|\int_{\gamma} f(z)dz\right| \leqslant \int_{\gamma} |f(z)|\, ds \leqslant ML, \tag{4}$$

---

① 我们也可以定义积分

$$\int_{\gamma} f(z)ds = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)s_k,$$

称为$f(z)$沿γ的第一型曲线积分.(1)式所定义的积分称为$f(z)$沿γ的第二型曲线积分. 容易看出

$$\int_{\gamma} fds = \int_{\gamma} uds + i\int_{\gamma} vds.$$

由于$dz=\gamma'(t)dt$，$|dz|=|\gamma'(t)|dt=ds$. 所以上面的积分可写成$\int_{\gamma} f(z)|dz|$.
与(3)式相应地有

$$\int_{\gamma} f(z)|dz| = \int_{\alpha}^{\beta} f[\gamma(t)]|\gamma'(t)|dt. \tag{3'}$$

其中$\int_\gamma |f(z)|ds$是实函数$|f(z)|$在γ上的第一型线积分，

$M=\sup\limits_{z\in\gamma}|f(z)|$，$L$是$\gamma$的长度.

我们只证明 5)，由于

$$|S|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|f(\zeta_k)||z_k-z_{k-1}|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|f(\zeta_k)|s_k,$$

令 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}s_k\to 0$，得到

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right|\leqslant\int_\gamma|f(z)|ds.$$

由于在γ上$|f(z)|\leqslant M$，所以

$$\int_\gamma|f(z)|ds\leqslant ML.$$

例1 设$\gamma(t)$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$是一条可求长曲线，求$\int_\gamma dz$和$\int_\gamma zdz$.

按定义

$$\int_\gamma dz=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}(z_k-z_{k-1})=z_n-z_0=\gamma(\beta)-\gamma(\alpha).$$

而

$$\int_\gamma zdz=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}z_k(z_k-z_{k-1})$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}z_{k-1}(z_k-z_{k-1}).$$

这里，我们在第一个和号中取$\zeta_k=z_k$，在第二个和号中取$\zeta_k=z_{k-1}$，所以

$$\int_\gamma zdz = \frac{1}{2}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}(z_k + z_{k-1})(z_k - z_{k-1})$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}(z_k^2 - z_{k-1}^2)$$

$$= \frac{1}{2}(z_n^2 - z_0^2) = \frac{1}{2}(\gamma^2(\beta) - \gamma^2(\alpha)).$$

特别地，若γ是闭曲线，$\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$，则

$$\int_\gamma dz = \int_\gamma zdz = 0.$$

如果$\gamma(t)$，$\alpha \leqslant t \leqslant \beta$是光滑曲线，上面的两个积分可由（3）式更简便地算出.

$$\int_\gamma dz = \int_\alpha^\beta \gamma'(t)dt = \gamma(\beta) - \gamma(\alpha).$$

而

$$\int_\gamma zdz = \int_\alpha^\beta \gamma(t)\gamma'(t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\gamma^2(t)\Big|_\alpha^\beta = \frac{1}{2}(\gamma^2(\beta) - \gamma^2(\alpha)).$$

例 2 计算积分 $I = \int_\gamma \frac{z}{\bar{z}}dz$，其中 γ 是圆环 $\{z: 1 \leqslant |z| \leqslant 2\}$ 上半部分的边界，其方向如图3-2所示.

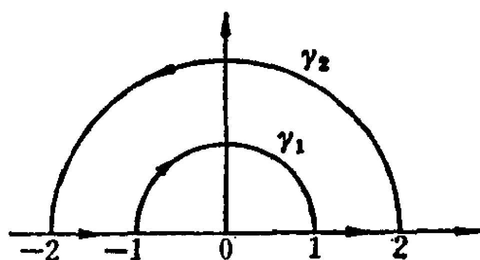


图 3-2

设γ_1，γ_2为两个半圆周，那么

$$I = 2 + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_1}$$

$$= 2 + \int_0^\pi 2ie^{i\theta}\, e^{2i\theta}d\theta$$

$$- \int_0^\pi ie^{i\theta}e^{2i\theta}d\theta$$

$$= 2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

例 3 计算积分$\int_\gamma \frac{1}{z-a}dz$，其中 $\gamma(t) = a + Re^{it}$，$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$，$a$是一复常数.

设 $f(z) = \frac{1}{z-a}$，$f[\gamma(t)] = \frac{1}{Re^{it}}$，$\gamma'(t) = Rie^{it}$. 由(3)式，

$$\int_\gamma \frac{1}{z-a}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{it}} Rie^{it}dt$$

$$= \int_0^{2\pi} idt = 2\pi i.$$

注意，这个积分与半径R及 a 无关，后面我们将看到，对于其内部包含a点的任意可求长简单闭曲线，此积分的值总是$2\pi i$.

习　题

1. 计算积分

$$\int_\gamma |z|dz,$$

其中 γ 是：(1) 线段$[-i,i]$；(2) 从$-i$ 到 i 的左半单位圆周；(3)从$-i$ 到 i 的右半单位圆周.

2. 计算积分

$$\int_\gamma \mathrm{Re}\, z\, dz,$$

其中：(1) γ为线段$[0,1+i]$；(2) $\gamma(t) = 2e^{it}$，$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

3. 计算下列积分：

(1) $\int_{[0,1,1+i]} e^{\bar{z}}dz$；

(2) $\int_\gamma |z-1||dz|$，$\gamma(t) = e^{it}$，$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$；

(3) $\int_\gamma (\bar{z})^2 dz$，$\gamma(t)=re^{it}$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$，$r>0$；

(4) $\int_\gamma (z-a)^n dz$，$\gamma(t)=a+re^{it}$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$，$r>0$，$n$是不等于$-1$的整数；

(5) $\int_\gamma \bar{z}|z|dz$，γ是上半单位圆的边界，方向为反时针方向；

(6) $\int_\gamma \log z dz$，$\gamma(t)=Re^{it}$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

4．设γ是可求长简单闭曲线，方向为反时针方向，A是γ所范围的域的面积，求证

$$\int_\gamma x dz=-i\int_\gamma y dz=\frac{1}{2}\int_\gamma \bar{z} dz=iA.$$

5．设函数$f(z)$在点z_0的邻域内连续．求证

(1) $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})d\theta=f(z_0)$；

(2) $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r}\dfrac{f(z)}{z-z_0}dz=f(z_0)$.

6．证明

(1) 如果函数 $f(z)$在半带域：$x\geqslant x_0$，$0\leqslant y\leqslant h$上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x+iy)=A$存在，且与$y$无关，则

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{\gamma_x} f(z)dz=iAh.$$

其中　$\gamma_x(t)=x+it$，$0\leqslant t\leqslant h$；

(2) 若函数$f(z)$在扇形：$0<|z-a|\leqslant r_0$，$0\leqslant\arg(z-a)\leqslant\alpha$ $(0<\alpha\leqslant 2\pi)$内连续，且$\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=A$存在，则

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} f(z)dz=iA\alpha,$$

其中$\gamma_r(t)=a+re^{it}$，$0\leqslant t\leqslant \alpha$，$0<r<r_0$；

（3）若函数 $f(z)$在域：$R_0\leqslant|z-a|<\infty$，$0\leqslant \arg(z-a)\leqslant\alpha$（$0<\alpha\leqslant 2\pi$）上连续，且$\lim\limits_{z\to\infty}(z-a)f(z)=A$存在，则

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz=iA\alpha,$$

其中$\gamma_R(t)=a+Re^{it}$，$0\leqslant t\leqslant\alpha$，$R>R_0$.

7．若实函数 u,v 在点(x_0, y_0)有一阶连续偏导数，证明函数$f=u+iv$在点$z_0=x_0+iy_0$可微的充要条件是

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\int_{\gamma} f(z)dz=0,$$

其中$\gamma(t)=re^{it}$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

§2 Cauchy 定理

1. Cauchy 定理

设函数$f(z)$在域D内解析，$\gamma(t)$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$是$D$内的可求长曲线，在前一节里我们有

$$\int_{\gamma} f(z)dz=\int_{\gamma} udx-vdy+i\int_{\gamma} vdx+udy.$$

假如D是单连通域，并且u及v的偏导数在D内是连续的，那么由数学分析中的结果，我们知道$\int_{\gamma} udx-vdy$与$\int_{\gamma} vdx+udy$的值只取决于积分路径的起点和终点，而与$\gamma(t)$的位置无关的条件是

$$-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}.$$

而这正是解析函数所满足的C-R方程.因此，在u与v的偏导数连续这个补充假定之下，$f(z)$在D内沿任意路径的积分与路径的位

置无关，只取决于路径的起点和终点．换言之，$f(z)$沿D内的任一可求长闭曲线的积分为零．Cauchy 正是在这个补充假定下得到了上述结果．后来 Goursat 证明了这个条件不是必要的，这才眞正证明了解析函数这一结果的眞确性．下面我们采用 Pringsheim 的证明方法．

定理 1（Cauchy） 若D是$\mathbf{C}$上的单连通域，函数$f(z)$在D内解析，$\gamma(t)$是D内任意一条可求长闭曲线，则

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0. \tag{5}$$

我们先证明下述基本引理．

引理 若$f(z)$是域D内的连续函数，$\gamma(t)$是D内的可求长曲线，则对于任给$\varepsilon>0$，总存在一条内接于γ的并且完全位于D内的折线P，使得

$$\left|\int_{\gamma} f(z)dz - \int_{P} f(z)dz\right| < \varepsilon. \tag{6}$$

证明 因为γ（作为点集）是一紧集，所以γ与D的边界∂D（闭集）的距离$d(\gamma,\partial D)=\rho>0$．设$\gamma$的长度为$L$，$\varepsilon$是任给的正数．在$\gamma$上依次取分点$z_0=a, z_1, z_2, \cdots, z_n=b$，使得在$\gamma$上从分点$z_{k-1}$到$z_k$的曲线段$\gamma_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$的弧长$s_k<\rho$ $(k=1,2,\cdots,n)$（图3-3），在所有的圆$|z-z_{k-1}|<s_k$内$(k=1,2,\cdots,n)$（由$f(z)$的连续性）

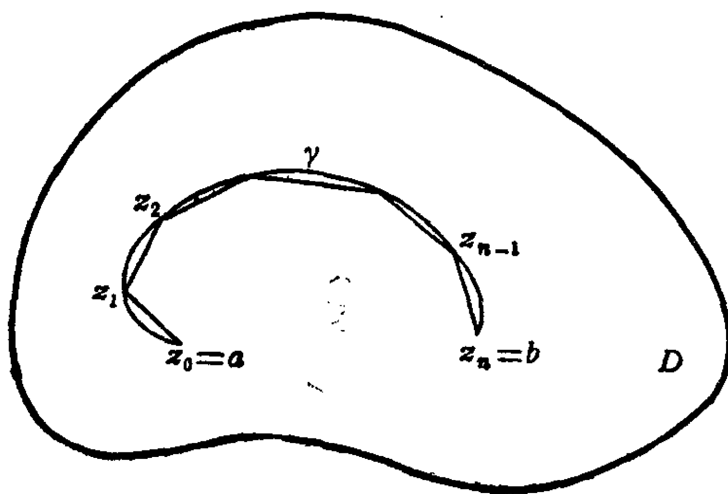


图 3-3

$$|f(z)-f(z_{k-1})| < \frac{\varepsilon}{2L},$$

那么以$z_0, z_1, \cdots, z_n$为顶点的折线P，就满足(6)式．事实上

$$\int_\gamma f(z)dz - \int_P f(z)dz$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[\int_{\gamma_k} f(z)dz - \int_{[z_{k-1}, z_k]} f(z)dz\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left\{\left[\int_{\gamma_k} f(z)dz - f(z_{k-1})(z_k - z_{k-1})\right]\right.$$

$$\left. - \left[\int_{[z_{k-1}, z_k]} f(z)dz - f(z_{k-1})(z_k - z_{k-1})\right]\right\},$$

由于

$$f(z_{k-1})(z_k - z_{k-1}) = \int_{\gamma_k} f(z_{k-1})dz$$

$$= \int_{[z_{k-1}, z_k]} f(z_{k-1})dz,$$

所以

$$\int_\gamma f(z)dz - \int_P f(z)dz$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k}[f(z) - f(z_{k-1})]dz$$

$$- \sum_{k=1}^{n}\int_{[z_{k-1}, z_k]}[f(z) - f(z_{k-1})]dz,$$

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz - \int_P f(z)\,dz\right| < \sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{2L}s_k + \sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{2L}s_k = \varepsilon.$$

下面我们只要对D内任意一条闭折线证明 Cauchy 定理就行了．事实上，设γ是D内的任一可求长闭曲线，由上面的引理，对于任给$\varepsilon>0$，在D内有γ的内接折线P，使得

$$\left|\int_\gamma f(z)dz - \int_P f(z)dz\right| < \varepsilon.$$

若能证$\int_P f(z)dz = 0$，则$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| < \varepsilon$，即$\int_\gamma f(z)dz = 0$.

利用对角线将闭折线分成几个三角形(图3-4).由于沿对角线的那些积分恰好抵消，所以沿闭折线的积分等于沿所有三角形积分的和．因此，问题又化为只要证明$f(z)$沿D内的任意三角形T的积分为零．设$\left|\int_T f(z)\,dz\right| = M$，我们要证明$M=0$．把$T$的三边中点相互连接起来，得到四个小三角形$T_1, T_2, T_3, T_4$(图3-5)，根据前面相同的理由，

$$\int_T f dz = \int_{T_1} f dz + \int_{T_2} f dz + \int_{T_3} f dz + \int_{T_4} f dz.$$

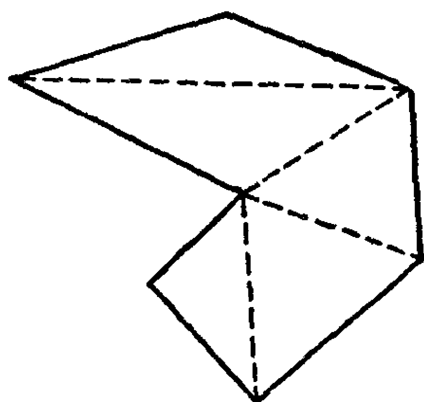


图 3-4

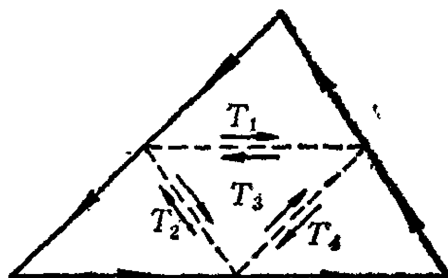


图 3-5

上式右端的四个积分至少有一个积分的模不小于$M/4$，设这个积分是沿$T^{(1)}=T_1$上的那个积分

$$\left|\int_{T^{(1)}} f(z)dz\right| \geqslant \frac{M}{4}. \tag{7}$$

同样，从$\int_{T^{(1)}} f(z)\,dz$出发，按照上面的方法，得到沿三角形$T^{(2)}$的积分满足条件

$$\left|\int_{T^{(2)}} f(z)dz\right| \geqslant \frac{1}{4}\cdot\frac{M}{4} = \frac{M}{4^2}.$$

如此继续下去，我们得到一三角形序列

$$T^{(0)}=T, T^{(1)}, T^{(2)}, T^{(3)}, \cdots,$$

相应的积分满足条件

$$\left|\int_{T^{(n)}} f(z)dz\right| \geqslant \frac{M}{4^n}, \quad (n=1,2,\cdots). \tag{8}$$

设L是T的长度，$T^{(n)}$的长度为$L/2^n$，Δ_n是 $T^{(n)}$及其内部的闭点集，$\Delta_{n+1}\subset\Delta_n(n=0,1,2,\cdots)$. 若 $\operatorname{diam}\Delta_0=d$，那么 $\operatorname{diam}\Delta_n = \frac{d}{2^n}\to 0(n\to\infty)$. 由 Cantor 定理，存在唯一的一点 z_0 属于所有的 $\Delta_n(n=0,1,2,\cdots)$. 因为$z_0\in D$，$f(z)$在点z_0可导，所以在点 z_0的邻域$V(z_0;\delta)$内，

$$f(z)-f(z_0)=f'(z_0)(z-z_0)+\rho(z_0,z)(z-z_0),$$

其中 $\lim\limits_{z\to z_0}\rho(z,z_0)=0$. 又因为 $\operatorname{diam}\Delta_n\to 0$，所以当 n 充分大时，$\Delta_n\subset V(z_0;\delta)$，

$$\begin{aligned}
&\int_{T^{(n)}} f(z)dz\\
&=\int_{T^{(n)}}[f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\rho(z,z_0)(z-z_0)]dz\\
&=\int_{T^{(n)}} f(z_0)dz+f'(z_0)\int_{T^{(n)}}(z-z_0)\,dz\\
&\quad+\int_{T^{(n)}}\rho(z,z_0)(z-z_0)dz.
\end{aligned}$$

由于$\int_{T^{(n)}} dz = \int_{T^{(n)}}(z-z_0)dz=0$（前一节的例 1)，所以

$$\int_{T^{(n)}} f(z)dz = \int_{T^{(n)}} \rho(z,z_0)(z-z_0)dz,$$

$$\left|\int_{T^{(n)}} f(z)dz\right| \leqslant \frac{d}{2^n}\cdot\frac{L}{2^n}\max_{z\in T^{(n)}}|\rho(z,z_0)|.$$

于是，由(8)式，

$$0\leqslant M\leqslant d\cdot L\cdot\max_{z\in T^{(n)}}|\rho(z,z_0)|.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{z\in T^{(n)}}|\rho(z,z_0)|=0$，所以$M=0$. 定理证毕.

注意，如果D是多连通域，D内的 Jordan 闭曲线γ，其内部不

一定完全属于D，在D内解析的函数$f(z)$沿γ的积分$\int_{\gamma} f(z)\, dz$不一定为零(见§1的例3)，但下面的定理1′是对的.

定理1′ 若函数$f(z)$在域D内解析，γ是D内的可求长简单闭曲线，且γ的内部属于D，则

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Cauchy定理还有下述一个重要推广.

定理2 若D是可求长Jordan闭曲线γ的内部，函数$f(z)$在D内解析，在$\overline{D}$上连续，则

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0. \tag{9}$$

证明 首先证明当D具有特别的形状时定理是正确的. 设G是由直线$x = a$，$x = b$ $(a<b)$及两条可求长连续曲线

$$MN: \ y = \varphi(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$
$$PQ: \ y = \psi(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

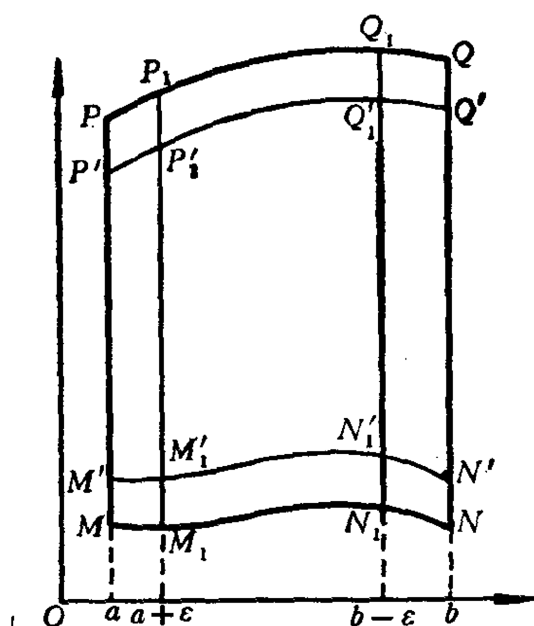


图 3-6

所围成的域，其中$\varphi(x)<\psi(x)$ $(a<x<b)$. 且不妨假定$\varphi(a)<\psi(a)$，$\varphi(b)<\psi(b)$(若$\varphi(a)=\psi(a)$或$\varphi(b)=\psi(b)$或两等式同时成立时，证明是类似的)(图3-6).

假定$f(z)$在G内解析，在$\overline{G}$上连续，我们要证明

$$\int_{MNQPM} f(z)dz = 0. \tag{10}$$

作直线$x = a+\varepsilon$，$x = b-\varepsilon$及两曲线

$$M'N':\ y=\varphi(x)+\eta,\qquad (a\leqslant x\leqslant b)$$
$$P'Q':\ y=\psi(x)-\eta,$$

其中ε,η是充分小的正数.因为G是单连通域，所以由定理1

$$\int_{M_1'N_1'Q_1'P_1'M_1'} f(z)dz=0.$$

现在将ε固定，令$\eta\to0$，则由于$f(z)$在$\overline{G}$上的一致连续性，有

$$\int_{M_1'N_1'} f(z)dz\longrightarrow\int_{M_1N_1} f(z)dz,$$
$$\int_{Q_1'P_1'} f(z)dz\longrightarrow\int_{Q_1P_1} f(z)dz,$$
$$\int_{P_1'M_1'} f(z)dz\longrightarrow\int_{P_1M_1} f(z)dz,$$
$$\int_{N_1'Q_1'} f(z)dz\longrightarrow\int_{N_1Q_1} f(z)dz.$$

所以

$$\int_{M_1N_1Q_1P_1M_1} f(z)dz=0. \qquad (11)$$

现在令$\varepsilon\to0$,同理有

$$\int_{M_1N_1} f(z)dz\longrightarrow\int_{MN} f(z)dz,$$
$$\int_{Q_1P_1} f(z)dz\longrightarrow\int_{QP} f(z)dz.$$

因此，如果能够证明当$\varepsilon\to0$时，

$$\int_{P_1M_1} f(z)dz\longrightarrow\int_{PM} f(z)dz,$$
$$\int_{N_1Q_1} f(z)dz\longrightarrow\int_{NQ} f(z)dz,$$

则可由(11)式推得(10)式成立．上述两个极限的证明是类似的，我们只需证明其中的一个，比如我们证明后一个极限.

设y_ε是$\varphi(b)$及$\varphi(b-\varepsilon)$中的较大者，Y_ε是$\psi(b)$及$\psi(b-\varepsilon)$中

的较小者，于是

$$\int_{NQ} f(z)dz = i\int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} f(b+iy)dy$$

$$= i\left(\int_{\varphi(b)}^{y_\varepsilon} + \int_{y_\varepsilon}^{Y_\varepsilon} + \int_{Y_\varepsilon}^{\psi(b)}\right) f(b+iy)dy,$$

$$\int_{N_1Q_1} f(z)\, dz = i\int_{\varphi(b-\varepsilon)}^{\psi(b-\varepsilon)} f(b-\varepsilon+iy)dy$$

$$= i\left(\int_{\varphi(b-\varepsilon)}^{y_\varepsilon} + \int_{y_\varepsilon}^{Y_\varepsilon} + \int_{Y_\varepsilon}^{\psi(b-\varepsilon)}\right) f(b-\varepsilon+iy)dy.$$

所以

$$\int_{NQ} f(z)dz - \int_{N_1Q_1} f(z)dz$$

$$= i\int_{y_\varepsilon}^{Y_\varepsilon} [f(b+iy) - f(b-\varepsilon+iy)]dy + iS(\varepsilon), \quad (12)$$

其中

$$S(\varepsilon) = \left(\int_{\varphi(b)}^{y_\varepsilon} + \int_{Y_\varepsilon}^{\psi(b)}\right) f(b+iy)dy$$

$$-\left(\int_{\varphi(b-\varepsilon)}^{y_\varepsilon} + \int_{Y_\varepsilon}^{\psi(b-\varepsilon)}\right) f(b-\varepsilon+iy)dy.$$

由于$f(z)$的一致连续性，当$\varepsilon\to0$时，(12)式右边第一项趋于零，而当$\varepsilon\to0$时，$y_\varepsilon, Y_\varepsilon$分别以$\varphi(b), \psi(b)$为极限，所以$S(\varepsilon)$的四个积分均趋于零，于是

$$\int_{N_1Q_1} f(z)dz \longrightarrow \int_{NQ} f(z)dz \quad (\varepsilon\to0).$$

现在回到定理2．利用有限条平行于y轴的辅助直线段把D分成几个具有上述形状的域①（如图 3-7 分 成五个这种特别形状的

① 除去很特别的情形外，对于通常遇到的域D，这都是可能的．关于 定理 2 的一般性证明可参看普里瓦洛夫著的《复变函数引论》第四章．

域）．若I_k是$f(z)$沿第k个域的边界的正向所取的积分，那么$I_k=0\quad(k=1,2,3,4,5)$，

$$\sum_{k=1}^{5} I_k=0.$$

但是，沿这些辅助线段的积分来回取两次，所以

$$\sum_{k=1}^{5} I_k=\int_\gamma f(z)\,dz.$$

最后就得到

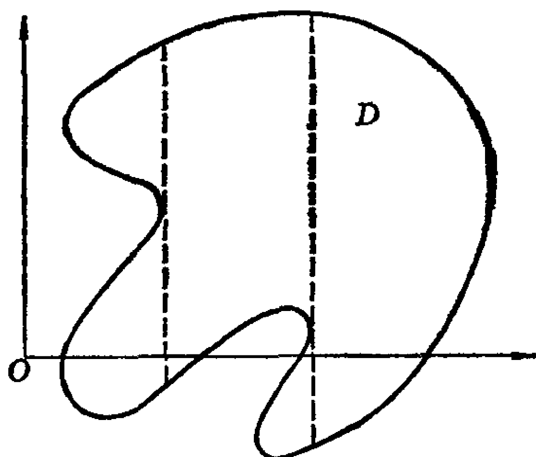


图 3-7

$$\int_\gamma f(z)\,dz=0.$$

在多连通域的情形，为了叙述与定理2相应的定理，我们需要先作一些说明．设$\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$是$n+1$条可求长 Jordan 闭曲线，$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$都在$\gamma_0$的内部，并且其中的任意一个都在其他的外部，于是$\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$范围成一个$n+1$连通域$D$，$D$的边界$\gamma$由$\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_n$所组成．我们规定$\gamma$的正向如下：当点沿$\gamma$运动时，域$D$总在它的左边．在这个规定下，$\gamma_0$是反时针方向，$\gamma_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$是顺时针方向．如果我们对一条Jordan 闭曲线规定反时针方向为正向（注意，这可能和$\gamma(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$的参数$t$增加的方向不一致），那么$\gamma$的正向对于$\gamma_k(k=1,2,\cdots,n)$来说就是负向．

定理3 设$\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_n$是$n+1$条可求长简单闭曲线，$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$都在$\gamma_0$的内部，$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$中的每一个都在其他的外部，$D$是$\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_n$所范围的域，$D$的边界$\gamma$由$\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_n$所组成，若函数$f(z)$在$D$内解析，在$\overline{D}$上连续，则

$$\int_\gamma f(z)\,dz=0,$$

其中积分是沿γ的正向取的．

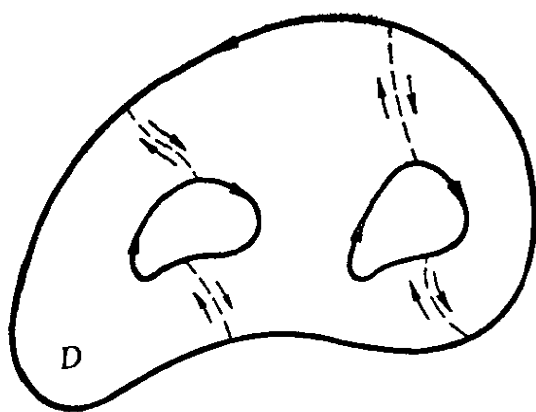


图 3-8

证明 我们可以用一些辅助曲线把区域D分成$n+1$个由简单闭曲线范围的域(图3-8)．设I_k是$f(z)$沿第k个域的边界的积分(沿正向取的)，根据定理2，

$$I_k=0$$
$$(k=1,2,\cdots,n+1).$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n} I_k=0.$$

但是因为$f(z)$沿辅助线的积分来回取两次，故有

$$\sum_{k=1}^{n} I_k=\int_\gamma f(z)\,dz.$$

即

$$\int_\gamma f(z)dz=0.$$

有时，为了方便起见，上式也写成

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz=\int_{\gamma_1} f(z)dz+\cdots+\int_{\gamma_n} f(z)dz \tag{13}$$

其中每个积分都是沿反时针方向取的．

特别地，当$n=1$时，有

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz=\int_{\gamma_1} f(z)\,dz. \tag{13'}$$

这表示$f(z)$沿γ_0和γ_1的积分可以相互转化，只要$f(z)$在由γ_0，γ_1所范围的(二连通)域内是解析的，并且在闭域上是连续的．比如在上节的例3中，若γ是任一可求长简单闭曲线，其内部包含a点，方向是反时针的，就有

$$\int_\gamma \frac{1}{z-a}dz = 2\pi i.$$

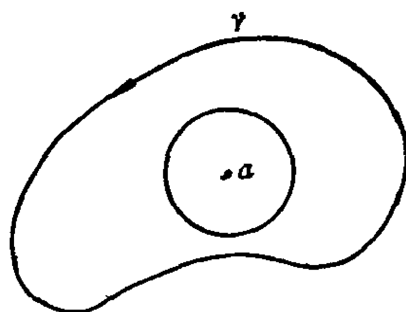


图 3-9

事实上，我们只要在γ的内部作以a为中心的小圆周（图3-9），就立即把积分转化为$1/(z-a)$在这个小圆周上的积分．又由Cauchy定理，若a在γ的外部积分显然为零，所以

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-a}dz = \begin{cases} 1, & \text{若}a\text{在}\gamma\text{的内部；} \\ 0, & \text{若}a\text{在}\gamma\text{的外部．} \end{cases} \tag{14}$$

从定理 3 我们还可以看出，若$f(z)$在多连通域D内解析，则$f(z)$沿D内任意可求长闭曲线的积分为零的充要条件是：$f(z)$沿着绕"洞"的任意可求长简单闭曲线的积分为零．以下再举两个例子．

例1　如果函数$f(z)$在$0<|z-a|<R$内解析，

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = A,$$

则

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i A,$$

其中$\gamma(\theta) = a + re^{i\theta}$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，$0<r<R$．

事实上，设$f(z)(z-a) = A + \varepsilon(z)$，$\varepsilon(z)\to 0$ $(z\to a)$．

$$f(z) = \frac{A}{z-a} + \frac{\varepsilon(z)}{z-a}.$$

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \frac{A}{z-a}dz + \int_\gamma \frac{\varepsilon(z)}{z-a}dz$$

$$= 2\pi i A + \int_\gamma \frac{\varepsilon(z)}{z-a}\,dz.$$

$$\left|\int_\gamma \frac{\varepsilon(z)}{z-a}dz\right| \leqslant \max_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} \varepsilon[\gamma(\theta)]\frac{1}{r}\cdot 2\pi r$$

$$= 2\pi \max_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} \varepsilon[\gamma(\theta)]\to 0 \quad (r\to 0).$$

于是，

$$\int_{\gamma} f(z)\ dz = 2\pi i A.$$

例2 设γ是一可求长简单闭曲线，$a, b\ (a \neq b)$ 不在γ上，求积分

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{dz}{(z-a)(z-b)}.$$

注意到

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right),$$

应用(14)式，立即得到

$$I = \begin{cases} 0, & \text{若}a, b\text{同时在}\gamma\text{内部或同时在}\gamma\text{的外部；} \\ \dfrac{1}{a-b}, & \text{若}a\text{在}\gamma\text{的内部，}b\text{在}\gamma\text{的外部；} \\ -\dfrac{1}{a-b}, & \text{若}a\text{在}\gamma\text{的外部，}b\text{在}\gamma\text{的内部.} \end{cases}$$

我们宁可再采用得到(14)式所使用的方法计算这个积分，因为这个方法具有普遍的意义．若a, b都在γ的内部，我们在γ内部分别作以a, b为中心的小圆周 γ_1, γ_2（图3-10），那么由(13)式得到

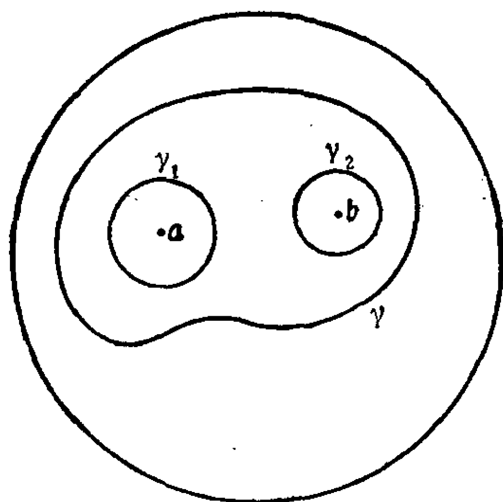


图 3-10

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{dz}{(z-a)(z-b)} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{dz}{(z-a)(z-b)},$$

由例 1 第一个积分等于$\frac{1}{a-b}$，第二个积分为$\frac{1}{b-a}$，所以 $I=0$.

此外，也可以采用“外挖”的方法，即考虑圆周$|z|=R$(R充

分大)，使其内部完全包含γ．由(13′)式得

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{dz}{(z-a)(z-b)}.$$

在圆周$|z|=R$上

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)}=O\left(\frac{1}{R^2}\right),$$

所以

$$\int_{|z|=R}\frac{dz}{(z-a)(z-b)}=O\left(\frac{1}{R}\right)\to 0\quad(R\to+\infty).$$

故$I=0$．

对于a,b中一个在γ的内部，一个在γ的外部的情形，可作同样的讨论．

2．变上限积分确定的函数

设函数$f(z)$在单连通域D内解析，由 Cauchy 定理，$f(z)$沿D内以z_0为起点，以z为终点的任一可求长曲线的积分都是相同的．现在固定z_0，让z在D内变动，因而在D内确定一单值函数

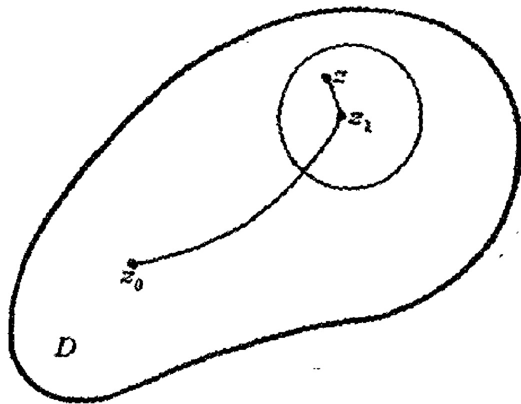


图 3-11

$$F(z)=\int_{z_0}^{z}f(\zeta)d\zeta. \tag{15}$$

设z_1是D内的任意一点．存在z_1的邻域$V(z_1;\delta)\subset D$，对于$V(z_1;\delta)$中的任意一点z(图3-11)，

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta=\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)d\zeta+\int_{z_1}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

$$=F(z_1)+\int_{z_1}^{z} f(\zeta)d\zeta.$$

右端从z_1到z的积分路径可取为直线段$[z_1,z]$，因此

$$F(z)-F(z_1)=\int_{[z_1,z]} f(\zeta)d\zeta,$$

$$\frac{F(z)-F(z_1)}{z-z_1}-f(z_1)=\frac{1}{z-z_1}\int_{[z_1,z]}[f(\zeta)-f(z_1)]d\zeta.$$

因为$f(z)$在点z_1连续，所以对于任给$\varepsilon>0$，存在一正数$\delta_1>0$，不妨设$\delta_1<\delta$，使得当$|z-z_1|<\delta_1$时，$|f(z)-f(z_1)|<\varepsilon$. 所以当$|z-z_1|<\delta_1$时，

$$\left|\frac{F(z)-F(z_1)}{z-z_1}-f(z_1)\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{|z-z_1|}\int_{[z_1,z]}|f(\zeta)-f(z_1)||d\zeta|<\varepsilon,$$

即$F'(z_1)=f(z_1)$. 因为z_1是D内的任意点，所以在D内有$F'(z)=f(z)$. 综上所述我们有下面的定理.

定理4 若函数$f(z)$在单连通域D内解析，则变上限积分确定的函数

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

在D内解析，且

$$F'(z)=f(z). \tag{16}$$

设在域D内给定一解析函数$f(z)$. 若存在D内的解析函数$F(z)$，使得$F'(z)=f(z)$，则称$F(z)$在D内是$f(z)$的一个原函数. 定理4表明，对于单连通域来说，解析函数$f(z)$的变上限积分确定的函数$F(z)$就是$f(z)$的一个原函数. 如果$G(z)$是$f(z)$的

另一个原函数，那么

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = G(z) - G(z_0).$$

事实上，$G(z)$是$f(z)$的原函数，故$G'(z)=f(z)$，但由定理4，$F'(z)=f(z)$，所以$(G(z)-F(z))'=0$，由前一章§2的习题3，$G(z)-F(z)\equiv c$（常数），从而$G(z)=F(z)+c$. 由于$F(z_0)=0$，得到$c=G(z_0)$，所以

$$F(z)=G(z)-G(z_0).$$

若D是多连通域，函数$f(z)$在D内解析，$f(z)$沿D内的可求长简单闭曲线γ的积分可能不为零，因而$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$一般说来与$z_0$到$z$在$D$内的路径有关，$f(z)$在$D$内就不可能有原函数. 事实上，如果$f(z)$在$D$有原函数$F(z)$，$\gamma(t)$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$是$D$内从$z_0$到$z$的曲线，那么

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = F(\gamma(t))\Big|_{\alpha}^{\beta}$$

$$= F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha))$$

与路径无关，只与$\gamma(t)$的起点z_0和终点z有关，这就产生矛盾. 如函数$f(z)=\dfrac{1}{z}$在$D=\mathbf{C}-\{0\}$内解析，但在D内没有原函数.

设D是单连通域，函数$f(z)$在D内解析，且$f(z)\neq 0$，那么一定存在D内的解析函数$g(z)$，使得$e^{g(z)}=f(z)$.

事实上，前面已经指出过，我们将在后面证明，由$f(z)$在D内解析可推出$f'(z)$在D内解析. 由于$f(z)\neq 0$，故$f'(z)/f(z)$在D内解析. 由定理4，函数

$$\varphi(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta$$

是 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 的一个原函数，$\varphi'(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}$. 设$\psi(z)=\frac{f(z)}{e^{\varphi(z)}}$，$\psi(z)$在$D$内解析，且

$$\psi'(z)=\frac{f'(z)e^{\varphi(z)}-f(z)e^{\varphi(z)}\varphi'(z)}{e^{2\varphi(z)}}$$

$$=\frac{f'(z)e^{\varphi(z)}-f(z)e^{\varphi(z)}\cdot f'(z)/f(z)}{e^{2\varphi(z)}}=0,$$

所以$\psi(z)=c$（常数），即

$$f(z)=ce^{\varphi(z)}=e^{\varphi(z)+c'},\quad c'=\mathrm{Log}c.$$

由于$\varphi(z_0)=0$，所以$c=f(z_0)$，$c'=\mathrm{Log}f(z_0)$，所以我们要求的函数

$$g(z)=\int_{z_0}^{z}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta+\log f(z_0)+2k\pi i \tag{17}$$

$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

此式表示出多值函数$\mathrm{Log}f(z)$的各解析分支，这些分支相差$2\pi i$的整数倍，容易看出满足$e^{g(z)}=f(z)$的任一函数$g(z)$也一定可由上式表出．事实上，若$g_1(z)$满足$e^{g_1(z)}=f(z)$，则

$$g_1'(z)=f'(z)/f(z),$$

所以 $g_1(z)-\varphi(z)$ 是一常数，$g_1(z)=\varphi(z)+c^*$. 因为$\varphi(z_0)=0$，所以$c^*=g_1(z_0)$. 又由$e^{g_1(z)}=f(z)$，$e^{c^*}=f(z_0)$，所以c^*是$\mathrm{Log}f(z_0)$中的某一个值.

因此，如果w_0使得$e^{w_0}=f(z_0)$，那么函数

$$g_0(z)=w_0+\int_{z_0}^{z}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta$$

在D内解析，且满足条件

$$e^{g_0(z)}=f(z),\quad g_0(z_0)=w_0,$$

即$g_0(z)$是多值函数$\mathrm{Log}f(z)$的一个解析分支，且$g_0(z_0)=w_0$.

对于任意的一个复数λ，我们规定

$$[f(z)]^{\lambda}=e^{\lambda \operatorname{Log} f(z)}.$$

因为$\operatorname{Log} f(z)$是多值的，所以一般说来，$[f(z)]^{\lambda}$也是多值函数．

$$\Phi(z)=e^{\lambda g_0(z)}$$

是$[f(z)]^{\lambda}$的一个分支．特别地，若D是不包含点$z=0$的单连通域，那么上面所说的对于函数$f(z)=z$也适用（见下面的例3）．

现在再回到多连通域D．设函数$f(z)$在D内解析，如上所述，一般来说，函数

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

不仅依赖于z（z_0是固定的），还依赖于积分的路径，因此$F(z)$是变上限z的多值函数．

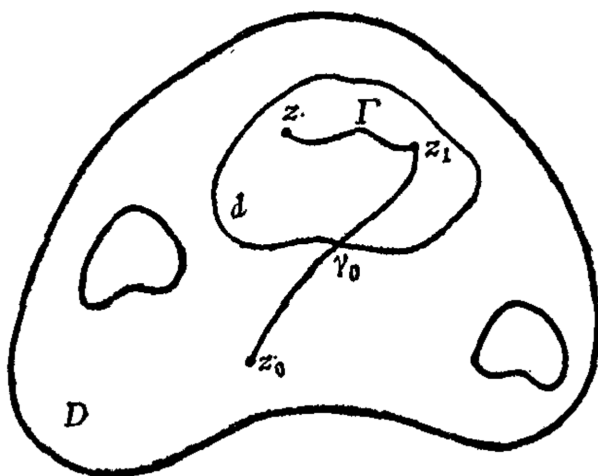


图 3-12

设d是属于D的任一单连通域，z_1是d内的固定点，点z在d内变动，Γ是d内连接z_1和z的可求长曲线(图3-12)，由前面的讨论可知，函数

$$I(z)=\int_{z_1}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

在d内是解析的，且$I'(z)=f(z)$．

在D内固定一连接z_0和z_1的可求长曲线γ_0，考虑函数

$$g(z)=\int_{\gamma_0} f(\zeta)d\zeta+\int_{\Gamma} f(\zeta)d\zeta.$$

它在d内是单值的，且

$$g(z)=I(z)+c_0,\text{ 其中 } c_0=\int_{\gamma_0} f(\zeta)d\zeta.$$

于是，$g(z)$是$F(z)$在d内的一个解析分支，$g'(z)=f(z)$．现在如果γ_1是D内连接z_0和z_1的另一可求长曲线，那么函数

$$g_1(z)=\int_{\gamma_1} f(\zeta)d\zeta+\int_{\Gamma} f(\zeta)d\zeta=I(z)+c_1,$$

所以

$$c_1=\int_{\gamma_1} f(\zeta)d\zeta.$$

$$g_1(z)=g(z)+c_1-c_0,$$

其中

$$c_1-c_0=\int_{\gamma_1} f(\zeta)d\zeta+\int_{\gamma_0^{-1}} f(\zeta)d\zeta.$$

γ_1和γ_0^{-1}组成D内的一条闭曲线γ. 由此可见，如果$c_1=c_0$，即$f(z)$沿γ的积分为零，那么$g_1(z)$和$g_0(z)$是$F(z)$的同一解析分支. 反之，则是$F(z)$的不同解析分支. 此外，如果γ^*是D内从z_0到z的可求长曲线，那么

$$\begin{aligned}&\int_{\gamma^*} f(\zeta)\,d\zeta\\&=\int_{\gamma^*} f(\zeta)d\zeta+\int_{\Gamma^{-1}} f(\zeta)d\zeta+\int_{\Gamma} f(\zeta)d\zeta\\&=I(z)+\int_{\gamma_2} f(\zeta)d\zeta,\end{aligned}$$

其中γ_2是由γ^*和Γ^{-1}组成的、从z_0到z_1的可求长曲线. 因此，在$I(z)+\int_{\gamma_0} f(\zeta)d\zeta$中，将$\gamma_0$换成$D$内连接从$z_0$到$z_1$的一切可能的可求长曲线，便得到$F(z)$在$d$内的各个单值解析分支，这些分支彼此相差一个常数，它们是$f(z)$在d内的一切原函数，并且

$$F(z)=g(z)+\int_{\gamma} f(\zeta)d\zeta,$$

这里γ是D内由z_0到z_1的可求长曲线与γ_0^{-1}所组成的闭曲线. 如设$\Gamma_i(i=1, 2, \cdots, n-1)$是环绕$n$连通域的第$i$个“洞”的可求长简单闭曲线，方向为正(反时针方向)，记$K_i=\int_{\Gamma_i} f(\zeta)d\zeta$，那么

$$\int_{\gamma} f(\zeta)d\zeta=N_1K_1+N_2K_2+\cdots+N_{n-1}K_{n-1},$$

其中N_i是γ环绕第 i 个"洞"的次数，反时针方向为正，顺时针方向为负，K_i称为$f(z)$在 D 内的积分周期．因此，在d 内多值函数$F(z)$的各分支可写为

$$F(z)=g(z)+N_1K_1+\cdots+N_{n-1}K_{n-1}. \qquad (18)$$

由N的一组值确定$F(z)$的一个分支，特别地，若 $K_1=K_2=\cdots=K_{n-1}=0$，则在D内任意单连通域d内$F(z)$是单值函数，从而$F(z)$在D内是单值的．

例3 设D为$\mathbf{C}-\{0\}$，它是一个二连通域，$f(z)=1/z$．由于 $\int_{\Gamma_1}\frac{1}{z}=2\pi i$，$\Gamma_1$：$z=r_0e^{it}$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$，$r_0>0$，所以

$\int_1^z\frac{1}{\zeta}d\zeta$是多值函数．现在$D$ 内的一个单连通域d：$\mathbf{C}$ 上去掉负实轴剩下的部分，并且取$z_0=z_1=1$，Γ 是 d 内连接 1 到 z 的可求长曲线，取为从 1 沿实轴到$|z|$，再沿圆弧至 z(图3-13)，于是

$$g(z)=\int_1^z\frac{1}{\zeta}\,d\zeta=\int_1^{|z|}\frac{dr}{r}+\int_0^{\theta}\frac{1}{re^{it}}re^{it}idt$$

$$=\log|z|+i\theta, \qquad -\pi<\theta<\pi.$$

由于$K_1=2\pi i$，所以若 γ 是 D 内一条从 1 到 z 的可求长曲线(图3-14)，那么

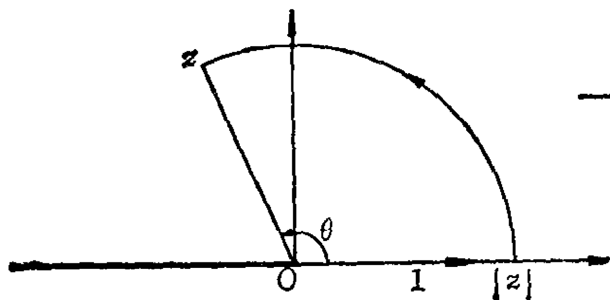


图 3-13

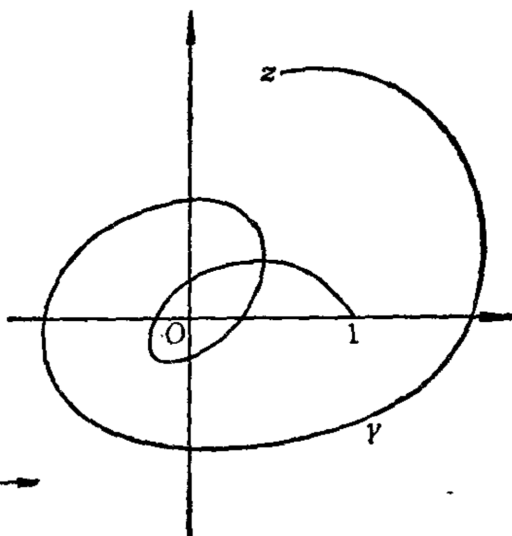


图 3-14

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \log|z| + i\theta + 2k\pi i \tag{19}$$

便是它在d内的各个分支.前面我们已经知道这正是多値函数$\text{Log}z$在d内的各个解析分支，因此 $\text{Log}z$又可以看作是函数 $1/z$ 的变上限的积分所确定的多値函数.

习　　题

1. 计算积分

$$\int_{|z|=2} \frac{2z-1}{z(z-1)} dz.$$

2. 计算积分

$$\int_{|z|=2a} \frac{e^z}{z^2+a^2} dz \quad (a>0).$$

3. 通过计算积分$\int_{|z|=1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}\frac{dz}{z}$，求证

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta d\theta = 2\pi \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \quad n=1,2,3,\cdots.$$

4. 设函数$f(z)$在$R_0<|z|<+\infty$内解析，且

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = A,$$

试求证：$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i A$，其中 γ 是任意圆周 $|z|=R$ ($R_0<R$,正向).

5. 设函数 $f(z)$在带域：$0<y<h$ 内解析，连续到边界，而且当$x\to\pm\infty$时，$f(x+iy)$关于y ($0\leqslant y\leqslant h$)一致地趋于零．若积分$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$存在，则$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+ih)dx$也存在，且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+ih)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

6．设函数$f(z)$在圆$|z|<R$内是解析的，求$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta$，$0<r<R$.

7．设函数 u 在圆$|z|<R$内调和，$0<r<R$，求证

$$u(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})d\theta.$$

8．计算$\int_0^{2\pi}\log|re^{i\theta}-a|d\theta$，$r<|a|$.

9．设函数$f(z)$在$0<|z|<R$内解析，求证积分

$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta$$

与r无关，$0<r<R$.

10．若$|a|\neq r$，求$\int_{|z|=r}\frac{|dz|}{|z-a|^2}$.

11．设$0<r<1$，证明

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{re^{i\theta}}{(1-re^{i\theta})^2}\right|d\theta=\frac{r}{1-r^2}.$$

12．设函数$f(z)$,$g(z)$在单连通域D内解析，z_0,z 是D内的两点，证明分部积分公式

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)g'(\zeta)d\zeta=f(\zeta)g(\zeta)\Big|_{z_0}^{z}-\int_{z_0}^{z} f'(\zeta)g(\zeta)d\zeta.$$

13．证明

$$\int_{\gamma}\frac{dz}{1+z^2}=\frac{\pi}{4}+k\pi,\quad k=0,\ \pm1,\pm2,\cdots,$$

其中γ是从 0 到 1 且不经过点$\pm i$的可求长曲线.

§3 Cauchy 公式

1. Cauchy 公式

Cauchy定理最直接最重要的结果是Cauchy积分公式．这一公式表示，一个在域D内解析、在$\overline{D}$上连续的函数$f(z)$，它在边界上的值决定了它在D内的任意一点的值．

定理 1 设D是可求长简单闭曲线γ的内部，若函数$f(z)$在D内解析、在$\overline{D}$上连续，则

1）在D内有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta; \tag{20}$$

2）$f(z)$在D内有各级导数，且在D内有

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta \quad (n=1,2,\cdots). \tag{21}$$

证明 设z_0为域D内任意一点，我们以点z_0为中心，r为半径在D内作一小圆周c_r，其内部属于D．设D_1是由γ和c_r所围成的域．显然，函数$\frac{f(z)}{z-z_0}$在D_1内解析，在$\overline{D_1}$上连续．由上节定理 3

$$\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\int_{c_r}\frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$

由于$\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{f(z)}{z-z_0}=f(z_0)$以及上节的例 1，

$$\int_{c_r}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0).$$

所以

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$

因为z_0是D内任意一点，所以(20)式在D内成立.

现在来证明(21)式. 先证当$n=1$时，(21)式成立. 设z_0是D内任意一点，由(20)式

$$f(z)-f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}-\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\right)d\zeta$$

$$=\frac{z-z_0}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)}d\zeta,$$

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}d\zeta$$

$$=\frac{z-z_0}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)^2}d\zeta.$$

因此要证明

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}d\zeta,$$

只要证明$\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)^2}d\zeta$ 在点z_0的邻域内是有界的.

为此设M是$|f(z)|$在γ上的上界，$|f(z)|\leqslant M$，设点z_0到γ的距离为$d(>0)$：$|\zeta-z_0|\geqslant d$，$\zeta\in\gamma$，假若$z\in V\left(z_0, \frac{d}{2}\right)$，则对于$\zeta\in\gamma$，有（图3-15）

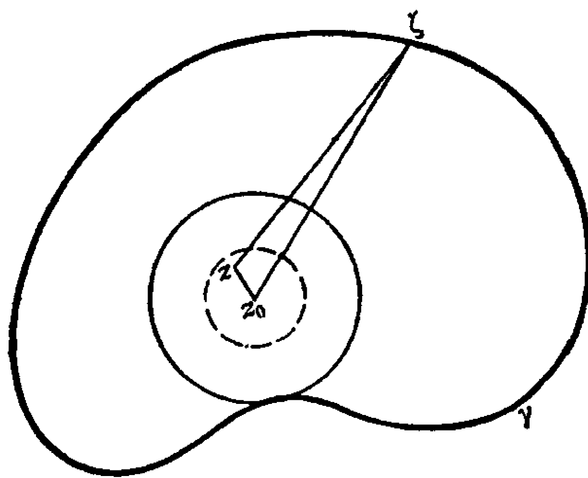


图 3-15

$$|\zeta-z|$$
$$=|(\zeta-z_0)-(z-z_0)|$$
$$\geqslant||\zeta-z|-|z-z_0||$$
$$=|\zeta-z|-|z-z_0|\geqslant d-\frac{d}{2}=\frac{d}{2}.$$

所以

$$\left|\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)^2}d\zeta\right| \leqslant \frac{M}{\frac{d}{2}\cdot d^2}\cdot L = \frac{2ML}{d^3},$$

其中L是γ的长度，所以

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}d\zeta.$$

因为z_0是D内任意一点，所以，当 $n=1$时，(21)式在 D 内成立.
设(21)式当 $n=k$ 时有

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta.$$

要证当$n=k+1$时，(21)式也成立，即要证

$$f^{(k+1)}(z) = \frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+2}}d\zeta.$$

若设

$$g_k(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta,$$

我们只要证

$$g_k'(z) = g_{k+1}(z)$$

在D内成立.

设z_0是D内任意一点，考虑

$$g_k(z) - g_k(z_0) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)\left\{\frac{1}{(\zeta-z)^{k+1}} - \frac{1}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\right\}d\zeta$$

$$= \frac{k!(z-z_0)}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)H_k}{(\zeta-z)^{k+1}(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta,$$

其中 $H_k = H_k(\zeta,z) = \sum_{i=0}^{k}(\zeta-z_0)^{k-i}(\zeta-z)^i$。

$$\frac{g_k(z)-g_k(z_0)}{z-z_0} - g_{k+1}(z_0)$$

$$= \frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma} f(\zeta)\frac{H_k(\zeta - z_0) - (k+1)(\zeta - z)^{k+1}}{(\zeta - z)^{k+1}(\zeta - z_0)^{k+2}}d\zeta.$$

注意到$H_k(\zeta, z_0) = (k+1)(\zeta - z_0)^k$，所以

$$H_k(\zeta, z)(\zeta - z_0) - (k+1)(\zeta - z)^{k+1} = (z - z_0)Q_k(\zeta, z),$$

其中$Q_k(\zeta, z)$是关于ζ, z的多项式，于是

$$\frac{g_k(z) - g_k(z_0)}{z - z_0} - g_{k+1}(z_0)$$

$$= \frac{k!(z - z_0)}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)Q_k(\zeta, z)}{(\zeta - z)^{k+1}(\zeta - z_0)^{k+2}}d\zeta.$$

因此，我们只要证明上式右端的积分在点z_0的邻域内是有界的．显然由于D是简单闭曲线的内部，因而是有界的．当$\zeta \in \gamma$，$z \in D$时，多项式$Q_k(\zeta, z)$是有界的

$$|Q_k(\zeta, z)| \leqslant M_k \text{（只依赖于 } k \text{ 的常数）}.$$

和上面一样，当$z \in V\left(z_0; \dfrac{d}{2}\right)$，$\zeta \in \gamma$时，有

$$|\zeta - z| \geqslant \frac{d}{2},$$

所以

$$\left|\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)Q_k(\zeta, z)}{(\zeta - z)^{k+1}(\zeta - z_0)^{k+2}}d\zeta\right| \leqslant \frac{MM_kL}{\left(\dfrac{d}{2}\right)^{k+1}d^{k+2}}.$$

于是得到

$$\lim_{z \to z_0}\frac{g_k(z) - g_k(z_0)}{z - z_0} = g_{k+1}(z_0),$$

$$g_k'(z_0) = g_{k+1}(z_0).$$

因z_0是D内任意一点，所以在D内 $g_k'(z) = g_{k+1}(z)$．定理证毕．

定理 2　设D是由可求长简单闭曲线 $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 所围成的域，$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$全在$\gamma_0$的内部，$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$中的每一个都在其

他的外部，D的边界γ是由$\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_n$所组成．若函数$f(z)$在$D$内解析，在$\bar{D}$上连续，则在$D$内

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \tag{22}$$

$f(z)$在D内有各阶导数，且在D内

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta\ (n=1,2,\cdots). \tag{23}$$

定理 2 的证明与定理 1 的证明完全一样．

定理 3 若函数$f(z)$在域D内解析，则$f(z)$在D内有各阶导数．

证明 设z_0是D内任一点．以z_0为中心作一小圆周γ，使γ及其内部属于D．由定理 1，$f(z)$在γ的内部有各阶导数，z_0是D内任意一点，所以$f(z)$在D内有各阶导数．

这个定理表明我们曾经多次提到的事实：域内的解析函数，其导函数仍然是解析函数．

例 1 设γ是一可求长简单闭曲线，a在γ的内部，由Cauchy公式，我们再次得到（$f(z)\equiv 1$）

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{1}{z-a}dz=1.$$

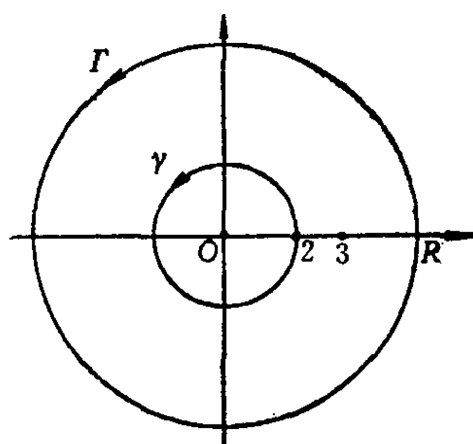


图 3-16

例 2 计算积分

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{dz}{(z^4-1)(z-3)^2},$$

其中$\gamma(t)=2e^{it}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$．

作一个大圆周Γ：$|z|=R$，$R>3$（图 3-16）．由定理 2，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{dz}{(z^4-1)(z-3)^2}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^{-1}}\frac{dz}{(z^4-1)(z-3)^2}$$

$$=\left(\frac{1}{z^4-1}\right)'\Bigg|_{z=3}=\frac{-27}{1600}.$$

$$I=\frac{27}{1600}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{dz}{(z^4-1)(z-3)^2}.$$

在Γ上

$$\frac{1}{(z^4-1)(z-3)^2}=O\left(\frac{1}{R^6}\right),$$

$$\int_{\Gamma}\frac{dz}{(z^4-1)(z-3)^2}=O\left(\frac{1}{R^5}\right)\to 0\quad(R\to+\infty).$$

所以

$$I=\frac{27}{1600}.$$

2. Morera 定理与Liouville 定理

由定理 3 我们可以得到 Cauchy 定理的逆定理.

定理 4 (Morera) 若函数 $f(z)$ 在域D内连续，且沿D内的任意一条可求长闭曲线的积分为零，则$f(z)$在D内解析.

证明 设z_0是D内一固定点. 由假设可得，变上限的积分

$$\int_{z_0}^{z}f(\zeta)d\zeta,\ z\in D$$

确定一单值函数$F(z)$. 重复前一节定理4的证明，可得到$F(z)$在D内解析，且$F'(z)=f(z)$. 由定理3可知，$f(z)$在D内解析.

注意，1)在单连通域的情形下，沿D内任意可求长闭曲线的积分为零的条件，可改为沿D内的任意三角形的积分为零. 事实上，由这一条件可推出沿D内的任意闭折线的积分为零，再由前一节的引理，$f(z)$沿D内的任意可求长闭曲线的积分为零. 2)在多连通域的情形下，只要求沿属于D的单连通域内的可求长

闭曲线γ的积分为零.

定理 5　若函数 $f(z)$在圆$|z-a|<R$内解析，并且$|f(z)|\leqslant M$，则

$$|f^{(n)}(a)|\leqslant\frac{n!M}{R^n}\quad(n=1,2,\cdots). \tag{24}$$

这个不等式称为Cauchy不等式.

证明　设γ是圆周$|z-a|=r$ $(0<r<R)$. 由(21)式

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\quad(n=1,2,\cdots),$$

所以

$$|f^{(n)}(a)|\leqslant\frac{n!}{2\pi}\int_\gamma\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-a|^{n+1}}|d\zeta|$$

$$\leqslant\frac{n!}{2\pi}\quad\frac{M}{r^{n+1}}\cdot 2\pi r,$$

即

$$|f^{(n)}(a)|\leqslant\frac{n!M}{r^n}.$$

令$r\to R$得到

$$|f^{(n)}(a)|\leqslant\frac{n!M}{R^n}.$$

定理 6（Liouville）　若函数$f(z)$在有穷平面**C**上解析，且有界，则$f(z)$必为一常数.

证明　设z_0是任一复数，考虑圆周$|z-z_0|=R$. 由假定存在常数M，使对一切z，有$|f(z)|\leqslant M$. 根据Cauchy不等式(24)，

$$|f'(z_0)|\leqslant\frac{M}{R}.$$

令$R\to+\infty$，得到$f'(z_0)=0$. 由z_0是任意的，所以对于一切z，$f'(z)=0$，故$f(z)$是一常数.

3. 最大模原理与Schwarz引理

定理 7 若函数$f(z)$在圆$|z-a|<R$内解析，则

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+re^{i\theta})d\theta,\quad 0<r<R. \qquad (25)$$

证明 设γ：$z=a+re^{i\theta}$ $(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$. 由 Cauchy 公式

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z-a}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(a+re^{i\theta})}{re^{i\theta}}rie^{i\theta}d\theta,$$

即

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+re^{i\theta})d\theta.$$

这个公式称为平均值公式. 它表示$f(z)$在圆心的值等于它在圆周上的积分平均值. 下面我们根据平均值公式导出最大模原理.

定理 8（最大模原理） 若函数$f(z)$在域D内解析，并且不为常数，则$|f(z)|$在D内取不到最大值.

证明 设$M=\sup\limits_{z\in D}|f(z)|$. 若$M=+\infty$，则定理显然成立. 假定$M$是有穷的. 因$f(z)$不是常数，而$M>0$(在相反的情况下，$f(z)\equiv0$)，所以$0<M<+\infty$. 下面我们用反证法证明定理. 若在$D$内存在一点$a$，使得$|f(a)|=M$，在$D$内取一个以$a$为中心，$r$为半径的小圆$C$，使这个小圆及其边界都属于$D$. 由平均值公式

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+re^{i\theta})d\theta.$$

从而

$$|f(a)|=M\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(a+re^{i\theta})|d\theta.$$

因对D内的一切z有$|f(z)|\leqslant M$，特别地，在圆周$|z-a|=r$上，有$|f(a+re^{i\theta})|\leqslant M$．但$|f(a+re^{i\theta})|$是$\theta$的连续函数，所以若在$\theta=\theta_0$处，$|f(a+re^{i\theta_0})|<M$，则在$\theta_0-\delta<t<\theta_0+\delta$，有$|f(a+re^{i\theta})|<M$．于是

$$
\begin{aligned}
M=|f(a)|&\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(a+re^{i\theta})|\,d\theta\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{\theta_0-\delta}^{\theta_0+\delta}|f(a+re^{i\theta})|\,d\theta\\
&\quad+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\theta_0-\delta}|f(a+re^{i\theta})|\,d\theta\\
&\quad+\frac{1}{2\pi}\int_{\theta_0+\delta}^{2\pi}|f(a+re^{i\theta})|\,d\theta\\
&<\frac{1}{2\pi}\{M\cdot 2\delta+M(2\pi-2\delta)\}=M.
\end{aligned}
$$

这就得出矛盾．所以在圆周$|z-a|=r$上$|f(z)|=M$．因为r是任意的（只要适当小），故在圆$|z-a|\leqslant r$上$|f(z)|=M$．

现在来证明对D内的任一点b，有$|f(b)|=M$．用D内一折线P连接a和b．设d是P与D的边界的距离．在P上取点$z_0=a,z_1,z_2,\cdots,z_n=b$，使得相邻两点间的距离$<\rho<d$，以这$n+1$个点为中心，$\rho$为半径作圆$C_0,C_1,C_2,\cdots,C_n$，显然这$n+1$个圆属于$D$，且后一个圆的圆心在前一个圆内（图3-17）．

我们已经证明在圆C_0内，$|f(z)|=M$，因为点z_1在C_0内，所以$|f(z_1)|=M$．于是根据以上的结果在C_1内，$|f(z)|=M$．因点z_2在C_1内，所以$|f(z_2)|=M$．如此继续下去，最后得到$|f(b)|=M$．于是在D内$|f(z)|=M$，根据第二章§2的习题4，$f(z)$在D内为常数，这与假定矛盾．定理证毕．

假如D是有界域，那么$\overline{D}$是有界闭域．若$f(z)$在D内解析，在$\overline{D}$上连续，则$|f(z)|$在$\overline{D}$上达到最大值，因此有下面的推论．

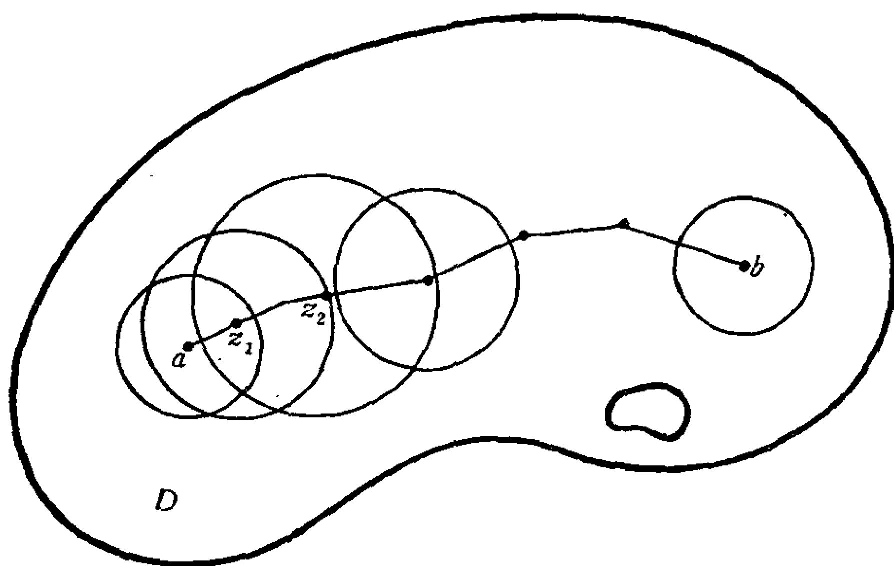


图 3-17

推论 若函数$f(z)$在有界域D内解析，在闭域$\overline{D}$上连续，并且不为常数，则$|f(z)|$只能在D的边界∂D上达到最大值．

作为最大模的一个应用，我们下面证明 Schwarz 引理．

Schwarz 引理 若函数$f(z)$在圆$|z|<1$内解析，且满足条件$f(0)=0$，$|f(z)|\leqslant 1$，那么，在圆$|z|<1$内必有

$$|f(z)|\leqslant|z|, \tag{26}$$

且

$$|f'(0)|\leqslant 1. \tag{27}$$

如果(27)式等号成立，或在圆$|z|<1$内一点$z_0\neq 0$处(26)式等号成立，则

$$f(z)=e^{i\alpha}z,$$

其中α是一实常数．

证明 令

$$\varphi(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)}{z}, & \text{当} z\neq 0,\\ f'(0), & \text{当} z=0.\end{cases}$$

$\varphi(z)$在圆环$0<|z|<1$内解析．因为

$$\lim_{z\to 0}\varphi(z)=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=f'(0)=\varphi(0).$$

所以$\varphi(z)$在圆$|z|<1$内连续．现在我们证明$\varphi(z)$在圆内是解析的．根据Morera定理，我们只要证明$\varphi(z)$沿圆$|z|<1$内的任意三角形$T=[a,b,c]$的积分为零．显然若点$z=0$不在T的内部，因$\varphi(z)$在$0<|z|<1$内解析，由Cauchy 定理得到$\int_T\varphi(z)dz=0$；若点$z=0$在T上，则由于$\varphi(z)$在T的内部解析，且连续到边界，根据§1的定理2，有$\int_T\varphi(z)dz=0$；若点$z=0$在T的内部，我们可以通过作一些辅助线的方法，将它化为上面考虑过的情形，同样得到$\int_T\varphi(z)dz=0$(图3-18)．于是由Morera定理，$\varphi(z)$在圆$|z|<1$内解析．在圆周$|z|=r<1$上，

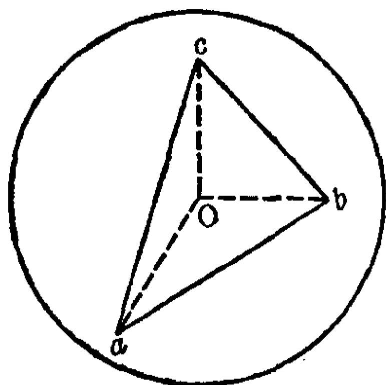


图 3-18

$$|\varphi(z)|=\left|\frac{f(z)}{z}\right|\leqslant\frac{1}{r}.$$

由最大模原理这个等式在$|z|\leqslant r$内成立，令$r\to 1$，得到$|\varphi(z)|\leqslant 1$，因而有(26)及(27)式．

若存在一点$z_0(z_0\neq 0)$，使$|f(z_0)|=|z_0|$，即$|\varphi(z_0)|=1$，或者若$|f'(0)|=1$，即$|\varphi(0)|=1$，则按照最大模原理$|\varphi(z)|\equiv 1$，故$\varphi(z)$为一常数，$\varphi(z)=e^{i\alpha}$，α为实常数，即$f(z)=e^{i\alpha}z$．

Schwarz引理表明，若在单位圆内解析的函数$f(z)$，$f(0)=0$，$|f(z)|\leqslant 1$，那么z的象到原点的距离比z到原点的距离近(图 3-19)．如果有一点使得这两者相等，那么$f(z)$就是一个旋转映照．

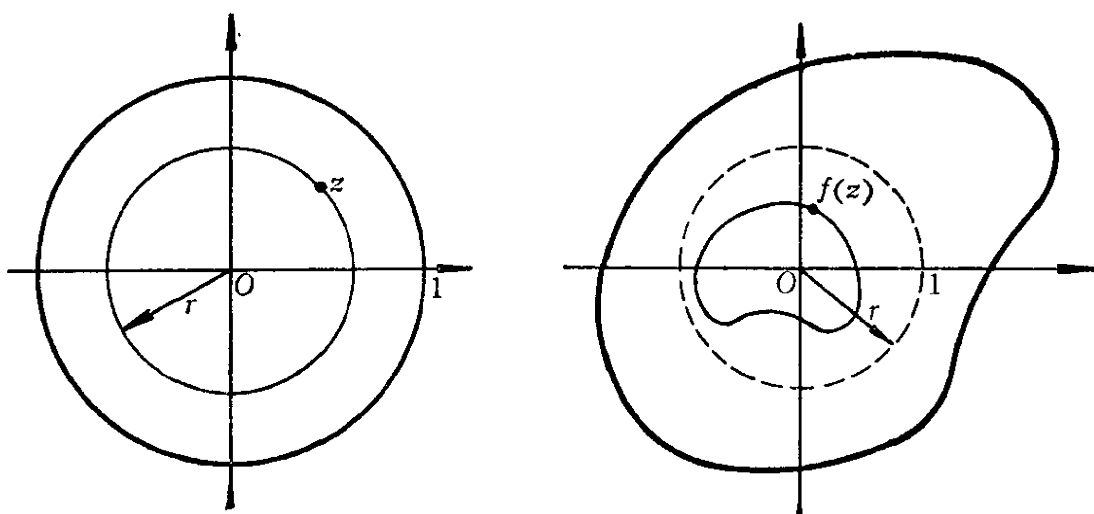


图 3-19

习　　题

1．计算下列积分

(1) $\int_{|z|=2}\dfrac{dz}{z^2+1}$；

(2) $\int_{x^2+y^2=2x}\dfrac{\sin\dfrac{\pi z}{4}}{z^2-1}dz$；

(3) $\int_{4x^2+y^2=2y}\dfrac{e^{\pi z}}{(1+z^2)^2}dz$；

(4) $\int_{|z+i|=1}\dfrac{e^z}{1+z^2}dz$；

(5) $\int_{|z-a|=a}\dfrac{z}{z^4-1}dz\ (a>1)$；

(6) $\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$.

2. 计算积分

(1) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^5-1}$;

(2) $\int_{|z|=2} \frac{1}{z^3(z-1)^3(z-3)^5}dz$;

(3) $\int_{|z|=R} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)}$, a,b不在圆周$|z|=R$上，n为正整数。

3. 计算积分

(1) $\int_{|z|=2} \bar{z}\,dz$;　　(2) $\int_{|z|=2} \frac{|dz|}{z-1}$;

(3) $\int_{|z|=1} \frac{\bar{z}^k P_n(z)}{z-z_0}dz$, $|z_0|\neq 1$, $0\leqslant k\leqslant n$,

$$p_n(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n.$$

4. 设 $p_n(z)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}[(z^2-1)^n]$ 是 Legendre 多项式. 证明

$$p_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(\zeta^2-1)^n}{2^n(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta,$$

其中γ是其内部包含点z的可求长简单闭曲线。

5. （外部 Cauchy 公式）设γ是可求长简单闭曲线，其内部

为域D_1，外部为域D_2. 函数$f(z)$在D_2内解析，从D_2内连续到γ，并且

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=A.$$

求证

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\begin{cases}-f(z)+A, & z\in D_2,\\ A, & z\in D_1.\end{cases}$$

6. 若γ，$f(z)$满足上题中的条件，且原点属于D_1，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{zf(\zeta)}{\zeta z-\zeta^2}d\zeta=\begin{cases}f(z), & z\in D_2,\\ 0, & z\in D_1.\end{cases}$$

7. 设函数$f(z)$在有穷平面$\mathbf{C}$上解析，且当$z\to\infty$时，$|f(z)|=O(|z|^k)$，k是一正数，证明$f(z)$是一个次数$\leqslant k$的多项式.

8. 试用Liouville定理证明代数基本定理.

9. 设函数$f(z)$在$|z|<R$内解析，$M(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$，$r<R$. 证明$M(r)$是增函数.

10. 试用最大模原理证明代数基本定理.

11. 设函数$f(z)$在有界域D内解析，在闭域$\overline{D}$上连续，并且$f(z)\neq 0$. 证明：如果在D的边界上$|f(z)|=M$（常数），则$f(z)=Me^{i\alpha}$,α是实常数.

12. 设函数$f(z)$在$\mathbf{C}$上解析，且有界，求极限

$$\lim_{R\to\infty}\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz,\quad a,b\text{是常数}.$$

由此得到Liouville定理的另一证明.

13. 证明：若函数$f(z)$在单位圆$|z|<1$内解析，并且$|f(z)|\leqslant\dfrac{1}{1-|z|}$ ($|z|<1$)，则对于$0<r<1$，有

$$|f^{(n)}(0)|\leqslant\frac{n!}{r^n(1-r)}.$$

特别地，取 $r=\frac{n}{n+1}$，得到

$$|f^{(n)}(0)|\leqslant(n+1)!\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leqslant e(n+1)!,\quad n=1,2,\cdots.$$

14．设函数$f(z)$在单位圆$|z|<1$内解析，且$f(0)=0$．证明函数

$$\varphi(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)}{z}, & z\neq0,\\ f'(0), & z=0\end{cases}$$

在点$z=0$可导，且$\varphi'(0)=\frac{1}{2}f''(0)$．

15．设函数$\varphi(\zeta)$在可求长曲线γ上连续，证明：函数(Cauchy型积分)

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

在不包含γ上的点的任意域D内是解析的，并且

$$\Phi^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta,\quad n=1,2,3,\cdots.$$

16．设$f(z)$在$0<|z-a|<R$内解析，$\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=0$．

证明在$0<|z-a|<r<R$内

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

17．设函数$f(z)$在$0<|z-a|<R$内解析，且$f(z)$在点$z=a$处连续，证明$f(z)$在圆$|z-a|<R$内解析．

18．若函数$f(z)$在圆$|z-a|<R$内解析，则对于任意正整数n，在$|z-a|<R$内存在解析函数$f_n(z)$，使得

李

$$f(z)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1}+(z-a)^n f_n(z).$$

19. 设函数 $f(z)$在圆$|z-a|<R$内解析，证明：(1)若对一切正整数n有$f^{(n)}(a)=0$，则$f(z)$必是一常数；(2)若$f(z)$不是常数，则存在正整数m，使得$f^{(m)}(a)\neq 0$；(3)若$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(m-1)}(a)=0$，$f^{(m)}(a)\neq 0$，则称$a$是$f(z)$的$m$级(阶)零点.若$a$是$f(z)$的$m$级零点，则$f(z)=(z-a)^m f_1(z)$，函数$f_1(z)$在圆$|z-a|<R$内解析，且$f_1(a)=\dfrac{f^{(m)}(a)}{m!}$.

20. 设函数$f(z)$在有界域D内解析，不为常数，在$\overline{D}$上连续.若$f(z)\neq 0$,

$$m=\inf_{z\in\partial D}|f(z)|,\qquad M=\sup_{z\in\partial D}|f(z)|,$$

则在D内，$m<|f(z)|<M$.

21. 若非常数函数$f(z)$在$1<|z|<\infty$解析，在$1\leqslant|z|<\infty$连续，且$\lim\limits_{z\to\infty}f(z)$存在(有穷)，则

(1) $|f(z)|$仅在$|z|=1$上达到最大值；

(2) $M(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$是$r$的严格递减函数.

22. 若$p_n(z)$是n次多项式，当$|z|<1$时，$|p_n(z)|\leqslant M$，则当$1\leqslant|z|<+\infty$时，$|p_n(z)|\leqslant M|z|^n$.

23. (Hadamard三圆定理)若函数$f(z)$在圆环$r_1<|z|<r_2$内解析，在闭圆环$r_1\leqslant|z|\leqslant r_2$上连续.

$$M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|\qquad(r_1\leqslant r\leqslant r_2).$$

则$\log M(r)$是$\log r$的凸函数，即

$$\log M(r)\leqslant\frac{\log r_2-\log r}{\log r_2-\log r_1}\log M(r_1)+\frac{\log r-\log r_1}{\log r_2-\log r_1}\log M(r_2).$$

提示：考虑在沿半径割开的圆环内函数 $z^a f(z)$ 的一个解析分支，其中a是待定的实常数.

24．设函数 $f(z)$在圆$|z|<R$内解析，并且$|f(z)|\leqslant M$，$f(0)=0$，证明

$$|f(z)|\leqslant\frac{M}{R}|z|,\quad |f'(0)|\leqslant\frac{M}{R},$$

其中等号仅当 $f(z)=\frac{M}{R}e^{i\alpha}z$（$\alpha$ 为实数)时才成立.

25．设函数 $f(z)$ 在圆$|z|<1$ 内解析，$\mathrm{Re}f(z)>0$，$f(0)=a>0$. 证明

$$\left|\frac{f(z)-a}{f(z)+a}\right|\leqslant|z|,\quad |f'(0)|\leqslant 2a.$$

26．设函数$f(z)$在圆$|z|<1$内解析，$f(0)=0$. $\mathrm{Re}f(z)\leqslant A$ $(A>0)$,证明

$$|f(z)|\leqslant\frac{2A|z|}{1-|z|}.$$

27．设函数$f(z)=u(z)+iv(z)$在圆$|z|<R$内解析，在闭圆$|z|\leqslant R$上连续，证明

(1) $\displaystyle\int_{|\zeta|=R}\frac{\bar{z}f(\zeta)}{R^2-\bar{z}\zeta}d\zeta=0,\quad |z|<R;$

(2) $\displaystyle f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{(R^2-|z|^2)f(\zeta)}{(R^2-\zeta\bar{z})(\zeta-z)}d\zeta,\quad |z|<R;$

(3) $\displaystyle f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}\,u(Re^{i\varphi})d\varphi+iv(0),$

$|z|<R$；

(4) $u(z)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}\right)u(Re^{i\varphi})d\varphi$；

(5) 又若在圆周 $|z|=R$ 上 $u(z)\geqslant 0$，则

$$u(0)\frac{R-|z|}{R+|z|}\leqslant u(z)\leqslant\frac{R+|z|}{R-|z|}u(0).$$

28. 设函数 $f(z)$ 在圆 $|z|<R$ 内解析，在闭圆 $|z|\leqslant R$ 上连续，并且在 $|z|=R$ 上，$f(z)\neq 0$，$f(z)$ 在圆 $|z|<R$ 内的零点是 a_1，a_2，…，a_n（几级就算几个），证明在圆 $|z|<R$ 内有

$$\log|f(z)|=-\sum_{k=1}^{n}\log\left|\frac{R^2-\bar{a}_k z}{R(z-a_k)}\right|$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\varphi})|\mathrm{Re}\left(\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}\right)d\varphi$$

特别地，若 $f(0)\neq 0$. 则

$$\log|f(0)|=-\sum_{k=1}^{n}\log\frac{R}{|a_k|}+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\varphi})|d\varphi.$$

若 $z=0$ 是 $f(z)$ 的 m 级零点，则

$$\log\left|\frac{f^{(m)}(0)}{m!}\right|+m\log R$$

$$=-\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{R}{|a_k|}\right)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\varphi})|d\varphi,$$

其中 a_k 是 $f(z)$ 的零点，$a_k\neq 0$.

提示：考虑 $F(z)=f(z)\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{R^2-\bar{a}_k z}{R(z-a_k)}$，并注意到当 $|z|$ $=R$ 时，$\left|\dfrac{R^2-\bar{a}_k z}{R(z-a_k)}\right|=1$.

第四章　解析函数的级数展式

这一章，我们从解析函数的 Cauchy 公式这一积分表达式出发，给出解析函数的级数表示—Taylor级数和 Laurent 级数．然后，以级数为工具，研究解析函数在奇点附近的性质．

§1　函数项级数．Weierstrass定理

1．级数的一般概念与基本性质

设$z_n \in \mathbf{C}$（$n=1,2,\cdots$），我们称级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots \tag{1}$$

是收敛的，如果它的部分和$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$收敛到点$z_0 \in \mathbf{C}$．称z_0为级数(1)的和，记作$z_0 = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$．否则，称级数(1)是发散的．

若级数(1)收敛，显然，这时S_n是Cauchy序列．反之，若(1)的部分和序列S_n是Cauchy序列，则S_n是收敛的（第二章§1），因此级数(1)是收敛的．为便于今后应用，我们把它写成下面的形式．

级数(1)收敛的充要条件是：对于任给$\varepsilon > 0$，存在正整数N，使得当$n \geqslant N$，$p \geqslant 1$时，

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p}| < \varepsilon.$$

特别地，若级数$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$收敛，则$\lim_{n\to\infty} z_n=0$，即收敛级数的一般项趋于零.

若级数$\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$收敛，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$绝对收敛．显然，绝对收敛的级数一定收敛.

设在集$A\subset\mathbf{C}$上给定函数序列$f_n(z)(n=1,2,\cdots)$．若对于A的每一点z，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots \qquad (2)$$

收敛，则称函数项级数(2)在A上收敛，其和函数为$f(z)$，记作

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z).$$

我们称$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$在$A$上一致收敛到$f(z)$，如果对任给$\varepsilon>0$，存在一正整数$N$，使得当$n\geqslant N$时，不等式

$$|f(z)-S_n(z)|<\varepsilon \qquad (3)$$

在A上成立，其中$S_n(z)=\sum_{k=1}^{n} f_k(z)$.

若$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$在$A$上一致收敛到$f(z)$，按定义，对任给$\varepsilon>0$，存在正整数$N$，使得当$n\geqslant N$时，不等式

$$|S_n(z)-f(z)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$|S_{n+p}(z)-f(z)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad (p\geqslant 1)$$

在A上成立．因此当$n\geqslant N$，$p\geqslant 1$时，

$$|S_{n+p}(z)-S_n(z)|<\varepsilon \tag{4}$$

在A上成立．反之，若(4)式成立，那么显然级数(2)在A上收敛，现在令$p\to+\infty$，得到当$n\geqslant N$时，

$$|f(z)-S_n(z)|\leqslant\varepsilon$$

在A上成立．所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$在$A$上一致 收敛到$f(z)$．

因此，级数(2)在A上一致收敛的充分必要条件是：对于任给$\varepsilon>0$，存在正整数N，使得当$n\geqslant N$，$p\geqslant 1$时，不等式

$$|f_{n+1}(z)+f_{n+2}(z)+\cdots+f_{n+p}(z)|<\varepsilon \tag{5}$$

在A上成立．

Weierstrass M-判别法　若函数序列$f_n(z)$在集A上定义，并且$|f_n(z)|\leqslant M_n(n=1,2,\cdots)$，而正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n$收 敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$在$A$上一致收敛．

证明　因为对于A中所有的z有

$$|f_{n+1}(z)+f_{n+2}(z)+\cdots+f_{n+p}(z)|$$
$$\leqslant M_{n+1}+M_{n+2}+\cdots+M_{n+p}$$

以及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n$收敛，所以对于任给$\varepsilon>0$，存在正整数$N$，使得当$n\geqslant N$，$p\geqslant 1$时，不等式

$$|f_{n+1}(z)+\cdots+f_{n+p}(z)|$$
$$\leqslant M_{n+1}+\cdots+M_{n+p}<\varepsilon$$

在A上成立，由上述一致收敛的充要条件，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$在$A$上一致收敛．

定理1　若$f_n(z)(n=1,2,\cdots)$在集A上连续，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$

在A上一致收敛到函数$f(z)$，则$f(z)$在A上连续.

证明 设z_0是A的任意一点.因为$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$在$A$上一致收敛到$f(z)$，所以对任给$\varepsilon>0$，存在正整数$N$，使得当$n\geqslant N$时，$|f(z)-S_n(z)|<\varepsilon/4$在$A$上成立．又由于$f_n(z)$在点$z_0$连续，$S_N(z)=\sum_{k=1}^{N} f_k(z)$在点$z_0$连续，所以，存在$\delta>0$，使得当$z\in V(z_0;\delta)\cap A$时，$|S_N(z)-S_N(z_0)|<\varepsilon/2$．于是，当$z\in V(z_0;\delta)\cap A$时，

$$
\begin{aligned}
&|f(z)-f(z_0)|\\
&\quad\leqslant|f(z)-S_N(z)|+|S_N(z)-S_N(z_0)|\\
&\qquad+|f(z_0)-S_N(z_0)|<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon.
\end{aligned}
$$

故$f(z)$在点z_0连续．z_0是A的任意一点，所以$f(z)$在A上连续．定理证毕．

定理2 若$f_n(z)(n=1,2,\cdots)$在可求长曲线γ上连续，级数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$在$\gamma$上一致收敛到函数$f(z)$，则

$$\int_\gamma f(z)dz=\sum_{n=1}^{\infty}\int_\gamma f_n(z)dz. \tag{6}$$

(6)式表明$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$可以沿$\gamma$逐项积分．

证明 由定理1，$f(z)$在γ上连续．因为$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$在$\gamma$上一致收敛到$f(z)$，所以对任给$\varepsilon>0$，存在正整数$N$，使得当$n\geqslant N$时，

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(z) - f(z)\right| < \frac{\varepsilon}{L}$$

在γ上成立，其中L是γ的长度.

于是当$n \geqslant N$时，

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \int_\gamma f_k(z)dz - \int_\gamma f(z)dz\right|$$

$$= \left|\int_\gamma \left\{\sum_{k=1}^{n} f_k(z) - f(z)\right\} dz\right| < \varepsilon.$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)dz = \int_\gamma f(z)dz.$$

定理证毕.

2. Weierstrass定理

设$f_n(z)$（$n=1,2,\cdots$）在域D内定义，若$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$在属于$D$内的任意一个有界闭域$\overline{d}$上一致收敛，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$在$D$内闭一致收敛.

显然，若$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$在域$D$内闭一致收敛，那么$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$在$D$内每一点都是收敛的，但是不一定在$D$内一致收敛. 自然，若$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$在$D$内一致收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$在$D$内闭一致收敛.

下面的定理是解析函数项级数理论的一个基本定理.

定理3（**Weierstrass**）若 1）$f_n(z)$（$n=1,2,\cdots$）在域D内

解析；2）$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$在$D$内闭一致收敛到函数$f(z)$．则1）$f(z)$在$D$内解析；2）$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$在$D$内闭一致收敛到$f^{(k)}(z)$．

证明 首先$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$在$D$内收敛，和函数$f(z)$在$D$内定义．由定理1，$f(z)$在$D$内的任一有界闭域上连续，所以$f(z)$在$D$内连续．

设K是D内的任一圆周，其内部属于D，γ是K内部的任一可求长闭曲线．由假定可知，$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$在$\gamma$上一致收敛．所以根据定理2得到

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z)dz.$$

因为$f_n(z)$在K的内部解析，所以$\int_{\gamma} f_n(z)\,dz = 0$．由此得到$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$．根据Morera定理，$f(z)$在$K$的内部解析，于是$f(z)$在$D$内解析．

设z_0是D内任意一点，圆周C：$|z-z_0|=r$及其内部属于D．$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\zeta)$在$C$上一致收敛到$f(\zeta)$．因为当$z\in V(z_0;r/2)$时，$1/(\zeta-z)^{k+1}$关于$\zeta$在$C$上是有界的

$$\left|\frac{1}{(\zeta-z)^{k+1}}\right| \leqslant \left(\frac{2}{r}\right)^{k+1},$$

所以当$z\in V(z_0;r/2)$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}$ 关于ζ在C上一致收敛到$f(\zeta)/(\zeta-z)^{k+1}$. 即对于任给$\varepsilon>0$，存在正整数N，使得当$n\geqslant N$时，

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{f_j(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}-\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}\right|<\frac{\varepsilon}{k!}$$

在C上成立，其中$z\in V(z_0;r/2)$.

于是当$z\in V(z_0;r/2)$时，由Cauchy公式，

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{j=1}^{n}f_j^{(k)}(z)-f^{(k)}(z)\right|\\&=\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{k!}{2\pi i}\int_C\frac{f_j(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta\right.\\&\quad\left.-\frac{k!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta\right|\\&\leqslant\frac{k!}{2\pi}\int_C\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{f_j(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}\right.\\&\quad\left.-\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}\right||d\zeta|<\varepsilon.\end{aligned}$$

这表明了$\sum_{n=1}^{\infty}f_n^{(k)}(z)$在$V(z_0;r/2)$一致收敛到$f^{(k)}(z)$.

若$\overline{d}$是D内的任一有界闭域，根据刚才的证明，在$\overline{d}$的每一点的邻域内，$\sum_{n=1}^{\infty}f_n^{(k)}(z)$一致收敛到$f^{(k)}(z)$. 所有这些邻域构成$\overline{d}$的一个开覆盖，由Heine-Borel定理，从中可以选出$\overline{d}$的有穷覆盖. 因此$\sum_{n=1}^{\infty}f_n^{(k)}(z)$在$\overline{d}$上一致收敛到$f^{(k)}(z)$. 定理

证毕.

下面的结果是定理 3 的补充，有时也称为Weierstrass第二定理.

定理4 设 D 是一个有界域，其边界是 ∂D. 若 $f_n(z)$ $(n=1,2,\cdots)$在D内解析，在闭域 $\overline{D}$上连续，且级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots$$

在∂D上一致收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在闭域 $\overline{D}$上一致收敛.

证明 任给$\varepsilon > 0$，存在正整数N，使得当$n \geqslant N$，$p \geqslant 1$时，

$$|f_{n+1}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon$$

在∂D上成立；由最大模原理，这个不等式在D内也成立，因此，在$\overline{D}$上成立. 根据一致收敛的充要条件，$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在$\overline{D}$上一致收敛. 定理证毕.

例1 研究函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$，这里$n^z = e^{z\log n}$.

我们证明若$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$在点$z_0 = x_0 + iy_0$处收敛，则它在半平面$\mathrm{Re}z > x_0$内也收敛.

设

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{z_0}}, \quad |S_n| \leqslant K \text{（常数）}.$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^z} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^{z_0}} \cdot \frac{1}{k^{z-z_0}} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{S_k - S_{k-1}}{k^{z-z_0}}$$

$$=\sum_{k=n+1}^{n+p} S_k\left\{\frac{1}{k^{z-z_0}}-\frac{1}{(k+1)^{z-z_0}}\right\}$$

$$+\frac{S_{n+p}}{(n+p)^{z-z_0}}-\frac{S_n}{(n+1)^{z+z_0}}.$$

当$\mathrm{Re}(z)=x>x_0$时，

$$\left|\frac{1}{k^{z-z_0}}-\frac{1}{(k+1)^{z-z_0}}\right|$$

$$=\left|(z-z_0)\int_k^{k+1}\frac{1}{t^{z-z_0+1}}dt\right|$$

$$\leqslant\left|z-z_0\right|\int_k^{k+1}\frac{1}{t^{x-x_0+1}}dt$$

$$=\frac{|z-z_0|}{x-x_0}\left\{\frac{1}{k^{x-x_0}}-\frac{1}{(k+1)^{x-x_0}}\right\}.$$

于是

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^z}\right|\leqslant\frac{K|z-z_0|}{x-x_0}\cdot\frac{1}{(n+1)^{x-x_0}}+\frac{2K}{(n+1)^{x-x_0}}.$$

由此可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$收敛.

因为当$z=1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$发散，所以，由刚才证明的结论知道，当$\mathrm{Re}z<1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$发散；当$\mathrm{Re}z\geqslant x_0>1$时，$\left|\frac{1}{n^z}\right|\leqslant\frac{1}{n^{x_0}}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{x_0}}$收敛．由 Weierstrass M-判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$当$\mathrm{Re}z\geqslant x_0>1$时一致收敛．$x_0$是任意大于1的正数，

由定理 3 可知，和函数在半平面 $\mathrm{Re}z>1$ 内解析，这个函数称为 Riemann zeta 函数$\zeta(z)$.

3. 幂级数

下面我们应用 Weierstrass 定理研究一类重要的函数项级数，即所谓幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots, \tag{7}$$

其中c_n是复常数，称为幂级数(7)的系数，a也是复常数．不失一般性，我们可以假定$a=0$，这时幂级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots. \tag{8}$$

在一般情况下，只要对(7)式作自变量替换$z'=z-a$即可．

下面的定理说明幂级数的收敛特性．

定理 5（Abel） 若幂级数(8)在点 $z_0\neq 0$ 处收敛，则(8)在圆$|z|<|z_0|$内绝对收敛，并且在任意闭圆$|z|\leqslant k|z_0|$（$0<k<1$）上一致收敛．

证明 因为$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$收敛，所以，一般项趋于零．于是存在正常数 M，使得对一切 n，都有$|c_n z_0^n|\leqslant M$．当$|z|<|z_0|$时，

$$|c_n z^n| = \left|c_n z_0^n\cdot\frac{z^n}{z_0^n}\right| \leqslant M\left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$

由于$|z/z_0|<1$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|z/z_0|^n$收敛，所以，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$在圆$|z|<|z_0|$内绝对收敛．又若$|z|\leqslant k|z_0|$（$0<k<1$），则

$$|c_n z^n| \leqslant M k^n.$$

而$\sum_{n=0}^{\infty} k^n$收敛，由 Weierstrass M-判别法知，$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在$|z| \leqslant k|z_0|$一致收敛.定理证毕.

Abel定理表明，若幂级数(8)在点$z=z_0 \neq 0$处收敛，则它在圆$|z|<|z_0|$内绝对收敛，特别地，$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$在$0 \leqslant r < |z_0|$收敛；若幂级数(8)在$z=z_1$处发散，则它在$|z|>|z_1|$发散，特别地，$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$在$r>|z_1|$发散.

因此，很自然我们来考虑与(8)相应的实的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n \quad (r \geqslant 0). \tag{9}$$

在数学分析中，已知存在一正数R（$0 \leqslant R \leqslant +\infty$），它是(9)的收敛半径.

1） 若$R=0$，即(9)仅在$r=0$处收敛，则(8)也就仅在点$z=0$处收敛. 因为若(8)在$z_0 \neq 0$处收敛，由 Abel 定理可以推出级数(9)就在$r<|z_0|$收敛，矛盾.

2） 若$R=+\infty$，即(9)对任意正数r都收敛，这时(8)对于所有的有穷复数都绝对收敛.

3） 若$0<R<+\infty$，则级数(8)在$|z|>R$发散，在$|z|<R$内绝对收敛. 事实上，若z_0是圆$|z|<R$内任意一点，显然级数(8)在点$z=z_0$处绝对收敛. 若z_1是$|z|>R$的任意一点，则存在r_1，使得$|z_1|>r_1>R$，如果$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$在点$z=z_1$收敛，则由Abel定理知道，$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n|$在$z=r_1<|z_1|$收敛. 但这是不可能

的，因为$r_1>R$，所以(8)在$|z|>R$发散．

因此，我们证明了对于级数(8)存在一个圆C：$|z|<R$，使得它在C内绝对收敛，在C的外部发散．这个圆称为幂级数(8)的收敛圆，R称为收敛半径．此外，我们还看到幂级数（8）的收敛半径就是与之相应的实系数的幂级数（9）的收敛半径．根据对级数(9)求收敛半径的公式，若

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \tag{10}$$

或

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} \tag{11}$$

存在（有穷或无穷），则级数(8)或(9)的收敛半径$R=1/L$．在一般情况下，有下面的结果．

定理6 设

$$L=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}, \tag{12}$$

那么幂级数(8)的收敛半径$R=1/L$．

证明 我们只要证明(9)的收敛半径$R=1/L$．

1） 若$0<L<+\infty$．设$r<1/L$，即$Lr<1$，取r_1，使得$Lr<r_1<1$或$L<r_1/r$．即$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}<r_1/r$，因此，存在正整数$N$，使得当$n\geqslant N$时，

$$\sqrt[n]{|c_n|}<\frac{r_1}{r},\quad |c_n|r^n<r_1^n;$$

因为$r_1<1$，所以$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n|r^n$收敛．

若$r>1/L$，即$Lr>1$，取r_2，使得$Lr>r_2>1$，即

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}>\frac{r_2}{r},$$

所以存在正整数序列$n_k\to+\infty$，使得当$n=n_k$时，

$$\sqrt[n]{|c_n|}>\frac{r_2}{r},\quad |c_n|r^n>r_2^n,$$

因为$r_2>1$，所以$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|r^n$发散．

2） 若$L=0$，即$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=0$，于是对于任给$r>0$，当$n$充分大时，

$$\sqrt[n]{|c_n|}<\frac{1}{2r},\quad |c_n|r^n<\frac{1}{2^n},$$

所以$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|r^n$收敛．

3） 若$L=+\infty$，即$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}=+\infty$.对于任给$r>0$，存在$n_k\to+\infty$，使得当$n=n_k$时，

$$\sqrt[n]{|c_n|}>\frac{1}{r},\quad |c_n|r^n>1,$$

所以$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|r^n$发散．定理证毕．

设幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n=c_0+c_1(z-a)+\cdots \tag{13}$$

的收敛半径为R.若$0<R<+\infty$，这时，当$|z-a|\leqslant r<R$时，有

$$|c_n(z-a)^n|\leqslant|c_n|r^n,$$

级数$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|r^n$收敛，所以$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$在$|z-a|\leqslant r$上一致收敛，而$r$可以任意近于$R$. 由Weierstrass定理，幂级数(13)的和函数$f(z)$在圆$|z-a|<R$内解析，而且

$$f^{(k)}(z)=k!c_k+(k+1)k\cdots 2c_{k+1}(z-a)+\cdots. \tag{14}$$

特别地，令$z=a$得到

$$c_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(a). \tag{15}$$

如果$R=+\infty$，那么幂级数(13)在整个平面$\mathbf{C}$上绝对收敛，在任意闭圆$|z|\leqslant r$上一致收敛，和函数$f(z)$在$\mathbf{C}$上解析，(14)及(15)式仍然成立.综上所述，有下面的结果.

定理7 幂级数(13)的和函数$f(z)$在它的收敛圆内是解析的，且(14)式在收敛圆内成立，即在收敛圆内可逐次微商.

例2 几何级数$\sum_{n=0}^{\infty}z^n$的收敛半径$R=1$，因为$c_n=1$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=1.$$

当$|z|<1$时，级数的部分和

$$S_n(z)=\sum_{k=0}^{n-1}z^k=\frac{1-z^n}{1-z},$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n(z)=\frac{1}{1-z}.$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad (|z|<1). \tag{16}$$

例3 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$的收敛半径$R=+\infty$，因为 $c_n=\frac{1}{n!}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

例4 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$的收敛半径$R=0$，因为$c_n=n!$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = +\infty.$$

例5 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$的收敛半径$R=1$，因为 $c_n=\frac{1}{n^2}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = 1.$$

例6 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ 的收敛半径 $R=1$，因为 $c_n=\frac{1}{n}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = 1.$$

设$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad (|z|<1)$. 由定理 7 得到

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad (|z|<1).$$

令$1-z=\zeta \quad (z=1-\zeta)$，那么

$$f'(1-\zeta)=\frac{1}{\zeta}, \quad |\zeta-1|<1.$$

在$|\zeta-1|<1$内沿1到ζ的路径积分（图4-1）

$$\int_1^\zeta f'(1-\zeta)d\zeta=\int_1^\zeta \frac{1}{\zeta}d\zeta,$$

$$f(0)-f(1-\zeta)=\log\zeta,$$

$$-\pi<\mathrm{Im}\log\zeta<\pi.$$

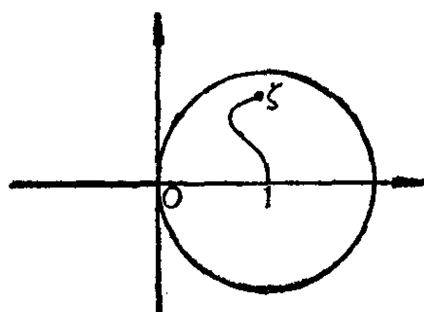


图 4-1

由于$f(0)=0$，所以

$$-\log(1-z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}, \ |z|<1,$$

$$-\pi<\arg(1-z)<\pi.$$

注意，前面的讨论没有涉及到幂级数（13）在收敛圆周$|z-a|=R$上的收敛性(假如$0<R<+\infty$)．在$|z-a|=R$上，幂级数(13)既可以是点点收敛，也可以是点点发散，还可以在一部分点上收敛，在其余的点上发散．比如$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$的收敛半径$R=1$．在$|z|=1$上，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$绝对收敛，而几何级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$在$|z|=1$上点点发散，因为一般项$z^n$的模为1而不趋于零．幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$的收敛半径$R=1$，在圆周$|z|=1$上只在点$z=1$处级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$发散．在其余的点$z=e^{i\theta}$（$0<\theta<2\pi$)上，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n},$$

它的实部和虚部两个级数都收敛，因此原级数在圆周 $|z|=1$ 上，除去点 $z=1$ 外处处收敛.

若幂级数(13)在收敛圆周 $|z-a|=R$ 上有一点 z_0 收敛，那么在这一点 z_0 处级数的和 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0-a)^n$ 与和函数 $f(z)$ 有何关系？为了回答这个问题，不失一般性，假定幂级数的收敛圆是单位圆，它在点 $z=1$ 是收敛的. 在一般情况下，只要对自变量作替换 $\zeta=\dfrac{z-a}{z_0-a}$，级数(13)即可化为

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty} c'_n\zeta^n,\quad c'_n=c_n(z_0-a)^n.$$

而 $\sum_{n=0}^{\infty} c'_n\zeta^n$ 的收敛圆为 $|\zeta|<1$，且在点 $\zeta=1$ 处收敛.

定理 8（Abel第二定理） 若幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{17}$$

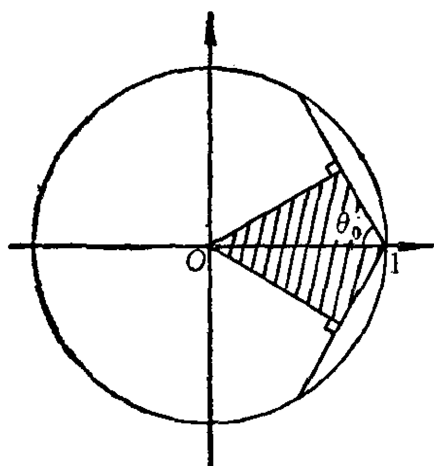


图 4-2

的收敛半径 $R=1$，且在点 $z=1$ 收敛到 S，则当 z 在单位圆中，以 $z=1$ 为顶点 A，OA 为分角线，开度为 $2\theta_0<\pi$ 的角域内趋于1时(图4-2)，$f(z)$ 趋于 S.

证明 设 d 是图4-2所示的阴影部分. 由定理 1，我们只要证明级数(17)在 d 上一致收敛.

设 $S_{n,p}=c_{n+1}+c_{n+2}+\cdots+c_{n+p}$，$p\geqslant 1$. 因为 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 收敛到 S，所以对任给 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使得当 $n\geqslant N$，$p\geqslant 1$ 时，$|S_{n,p}|<\varepsilon$.

$$
\begin{aligned}
& c_{n+1}z^{n+1}+\cdots+c_{n+p}z^{n+p} \\
& \quad =S_{n,1}z^{n+1}+(S_{n,2}-S_{n,1})z^{n+2}+\cdots \\
& \qquad +(S_{n,p}-S_{n,p-1})z^{n+p} \\
& \quad =S_{n,1}z^{n+1}(1-z)+S_{n,2}z^{n+2}(1-z)+\cdots \\
& \qquad +S_{n,p-1}z^{n+p-1}(1-z)+S_{n,p}z^{n+p} \\
& \quad =z^{n+1}(1-z)\cdot(S_{n,1}+S_{n,2}z+\cdots+S_{n,p-1}z^{p-2}) \\
& \qquad +S_{n,p}z^{n+p}.
\end{aligned}
$$

注意到$|z|<1$，所以当$n\geqslant N$，$p\geqslant 1$时，

$$
\begin{aligned}
& |c_{n+1}z^{n+1}+\cdots+c_{n+p}z^{n+p}| \\
& \quad \leqslant\varepsilon|1-z|(1+|z|+|z|^2+\cdots)+\varepsilon \\
& \quad =\varepsilon\left(\frac{|1-z|}{1-|z|}+1\right).
\end{aligned}
$$

下面我们只需证明当$z\in d$,且$z\neq 1$时,$\frac{|1-z|}{1-|z|}$是有界的.

设$\rho=|1-z|$，$r=|z|$（见图4-3），

$r^2=1+\rho^2-2\rho\cos\theta$，$0\leqslant\theta\leqslant\theta_0$

$$
\begin{aligned}
\frac{|1-z|}{1-|z|} &= \frac{\rho}{1-r} \\
&= \frac{\rho(1+r)}{1-r^2}\leqslant\frac{2\rho}{2\rho\cos\theta-\rho^2} \\
&= \frac{2}{2\cos\theta-\rho}\leqslant\frac{2}{2\cos\theta_0-\rho}
\end{aligned}
$$

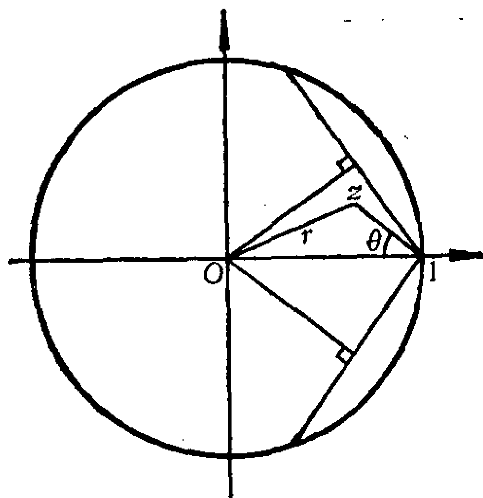


图 4-3

当z近于1(在角内)时，$\rho<\cos\theta_0$，所以

$$
\frac{|1-z|}{1-|z|}\leqslant\frac{2}{\cos\theta_0}.
$$

又当$z=1$时，

$$|c_{n+1}z^{n+1}+\cdots+c_{n+p}z^{n+p}|=|S_{n,p}|<\varepsilon,$$

$$n\geqslant N,\ p\geqslant 1,$$

所以当$n\geqslant N$，$p\geqslant 1$时，不等式

$$|c_{n+1}z^{n+1}+\cdots+c_{n+p}z^{n+p}|<K\varepsilon$$

在d上成立，其中K是和z无关的常数．定理证毕．

现将定理 8 用到例 6 中的级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=-\log(1-z)(|z|<1)$上．这个级数在$z=e^{i\theta}(0<\theta<2\pi)$处是收敛的，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}=-\log(1-e^{i\theta})$$

$$=-\log|1-e^{i\theta}|-i\arg(1-e^{i\theta}).$$

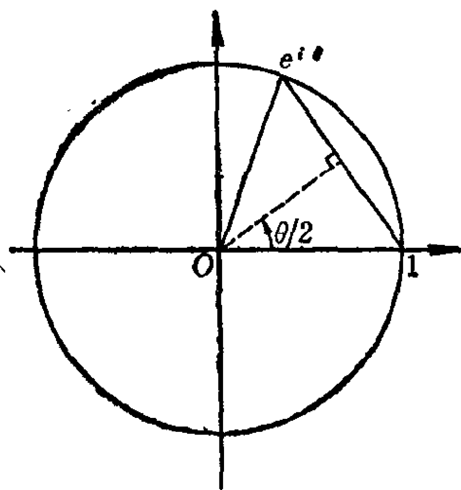


图 4-4

但是（见图4-4），

$$1-e^{i\theta}=2\sin\frac{\theta}{2}e^{-i(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2})},$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}=-\log\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}=\frac{\pi-\theta}{2}\quad(0<\theta<2\pi).$$

特别地，当$\theta=\pi$时，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\log 2.$$

当$\theta=\frac{\pi}{2}$时，得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}.$$

习　题

1．设$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$收敛，$|\arg c_n| \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$，求证$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$收敛．

2．求下列级数的收敛范围：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nz}{n^2}$；　　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$．

3．证明级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z+n}$在不包含负整数的任意闭圆上一致收敛．

4．证明级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)$在不包含正整数的任意有界闭域上一致收敛．

5．证明$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$的和函数在$\mathbf{C}$上去掉正整数点的域内解析．

6．设$f_n(z)$ $(n=1,2,\cdots)$在D内解析，$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$在域$D$内一致收敛，证明$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n'(z)|$在$D$内闭一致收敛．

7．设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$，$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$的收敛半径分别为$R_1$，$R_2$，问下列幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}a_n b_n z^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k})$$

有怎样的收敛半径R?

8. 求下列幂级数的收敛半径：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{e^n}z^n$; (2) $\sum_{n=0}^{\infty}z^{n!}$;

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}q^{n^2}z^n \quad (|q|<1)$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$;

(5) $\sum_{n=0}^{\infty}(3+(-1)^n)^n z^n$; (6) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{\log n}z^n$.

9. 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$的收敛半径为$R$，求下列幂级数

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}n^k c_n z^n$; (2) $\sum_{n=0}^{\infty}(2^n-1)c_n z^n$

的收敛半径.

10. 证明：若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$的收敛半径为$R$，且在 圆周$|z|=R$上的一点$z_0$处级数是绝对收敛的，则$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$在$|z|\leqslant R$上绝对一致收敛.

11. 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$的系数$c_n$是整数，且$c_n$中有无穷多个不为零，证明此级数的收敛半径$R\leqslant 1$.

12. 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$的收敛半径$R>0$，和函数为$f(z)$.

证明

(1) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2 r^{2n}$;

(2) 若$f(z)$在圆$|z|<R$内有界，$|f(z)|\leqslant M$，则

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2R^{2n}\leqslant M^2;$$

(3) $|c_n|\leqslant\frac{M(r)}{r^n}$,

其中$0<r<R$，$M(r)=\max\limits_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}|f(re^{i\theta})|$.

13． 若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$在单位圆$|z|<1$内收敛到有界函数$f(z)$，则$c_n=o(1)$.

14． 若函数$f(z)$在圆$|z|<1$内解析，$f(0)=0$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(z^n)$在圆$|z|<1$内收敛，且和函数在圆$|z|<1$内解析.

15． 若$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$的系数$c_n$是正数，且单调趋于0，则它的收敛半径$R\geqslant 1$；若$R=1$，则$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$在圆周$|z|=1$上可能除去点$z=1$外处处收敛.

16． 设$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$在$|z|\leqslant R$上收敛（$0<R<+\infty$），求证

$\varphi(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}z^n$在C上解析，且

$$|\varphi(z)| \leqslant M e^{\frac{|z|}{R}},$$

$$|\varphi^{(k)}(z)| \leqslant \frac{M}{R^k} e^{\frac{|z|}{R}},$$

其中M是正数.

17. 设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z)$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = g(z)$的收敛半径分别为$R_1$, R_2 ($0 < R_1$, $R_2 < +\infty$), 求证当$|z| < R_1 R_2$时, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} f(\zeta) g\left(\frac{z}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta},$$

其中$\frac{|z|}{R_2} < \rho < R_1$.

18. 举例说明Abel第二定理的逆定理不成立.

§2 Taylor 级数

1. 解析函数的Taylor展式

前一节我们证明了任意一个收敛半径为正数的幂级数, 其和函数在收敛圆内是解析的, 下面我们证明其逆亦眞.

定理1 若函数$f(z)$在圆C: $|z-a| < R$内解析, 则$f(z)$在C内可以展为幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n. \tag{18}$$

这个幂级数称为$f(z)$在$z=a$点的Taylor级数.

证明 设z是圆C内的任意一点. 作圆周γ: $|z-a| = r < R$, 使z位于γ的内部 (图4-5). 由Cauchy公式,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \qquad (19)$$

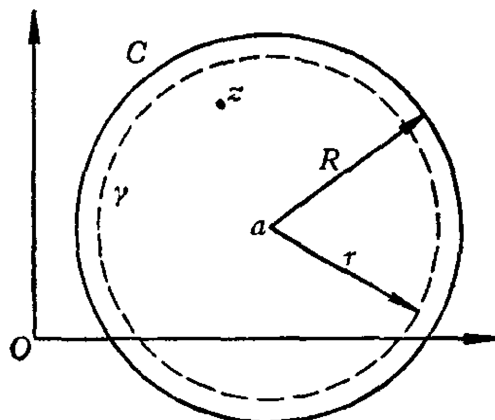


图 4-5

为了得到$f(z)$的幂级数展式，关键在于将$\frac{1}{\zeta-z}$（Cauchy核）展为几何级数

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)}$$

$$=\frac{1}{\zeta-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}}.$$

由于$\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|<1$，由上节的例2，

$$\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n,$$

所以

$$\frac{1}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}. \qquad (20)$$

并且右端的级数（关于ζ）在γ上一致收敛，由§1定理2，

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}\cdot(z-a)^n,$$

即

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n,$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a).$$

因为z是圆$|z-a|<R$内任意点，所以(1)式在圆$|z-a|<R$内成立.

注意：解析函数$f(z)$在$|z-a|<R$内的幂级数展式是唯一的，因为由上一节的定理7可知，这个幂级数一定是$f(z)$的Taylor级数．也就是说，任意幂级数一定是它的和函数的Taylor级数.

在第二章里我们曾经说过$f(z)$在点$z=a$解析，意指$f(z)$在a点的某一个邻域内解析，即$f(z)$在该邻域内处处可导.

$f(z)$在a点解析的另一个经典性定义是$f(z)$在a点邻域内可展为幂级数，a点称为$f(z)$的正则点.

现在我们看到，$f(z)$在a点解析的两个定义是等价的：如果$f(z)$在a点按第一个定义解析，那么由定理1，$f(z)$在a点的邻域内可展为幂级数（它的Taylor级数），所以按第二个定义它在a点解析．由§1定理7，反过来也对.

2. 零点的孤立性与唯一性定理

设函数$f(z)$在域D内解析，且不恒为零．若点$z_0\in D,f(z_0)=0$，则称z_0为$f(z)$的一个零点．因为$z_0\in D$，所以存在点z_0的一个邻域$V(z_0;r)\subset D$，$f(z)$在$V(z_0;r)$内可展为Taylor级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n\quad(|z-z_0|<r),$$

其中$c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)\quad(n=0,1,2,\cdots)$.

若c_n $(n=0,1,2,\cdots)$全为零，则$f(z)$在$V(z_0;\ r)$内恒为零．设z_1是D内任意一点，在D内作一折线连接z_0和z_1．应用证明最大模原理所采用的方法(不妨称之为滚圆法)，可以证明在点z_1的邻域内，$f(z)$也恒为零．于是$f(z)$在D内恒为零．这与题设矛盾，所以c_n不全为零．设

$$f'(z_0)=f''(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0,$$
$$f^{(m)}(z_0)\neq 0.$$

这时，称z_0为$f(z)$的m级(阶)零点．特别地，当$m=1$时，称z_0为$f(z)$的简单零点．于是，若点z_0是$f(z)$的m级零点，那么

$$f(z)=\frac{1}{m!}f^{(m)}(z_0)(z-z_0)^m+\cdots, \tag{21}$$

$$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z), \tag{22}$$

其中

$$\varphi(z)=\frac{1}{m!}f^{(m)}(z_0)+\frac{1}{(m+1)!}f^{(m+1)}(z_0)\cdot(z-z_0)+\cdots$$
$$(|z-z_0|<r). \tag{23}$$

$\varphi(z)$是由一个幂级数表示的函数，所以$\varphi(z)$在圆$|z-z_0|<r$内解析，且$\varphi(z_0)=\frac{1}{m!}f^{(m)}(z_0)\neq 0$．由$\varphi(z)$的连续性，存在$z_0$的一个邻域$V(z_0;\delta)(\delta\leqslant r)$，使得在$V(z_0;\delta)$内，$\varphi(z)\neq 0$．因此，$f(z)=\varphi(z)(z-z_0)^m$在$V(z_0;\delta)$内除了点$z_0$外没有其他的零点．综上所述，即得关于解析函数零点孤立性的定理．

定理2 若函数$f(z)$在域D内解析，且不恒为零，则$f(z)$在D内的零点是孤立的．即，若$f(z_0)=0$，则存在$V(z_0;\delta)(\delta>0)$，使得$f(z)$在$V(z_0;\delta)$只有z_0一个零点．

由零点孤立性容易得到下面重要的唯一性定理．

定理3 若函数$f_1(z)$，$f_2(z)$在域D内解析，点集$A\subset D$有一个属于D的极限点a，若$f_1(z)=f_2(z)$在A上成立，则$f_1(z)$

$=f_2(z)$在D内成立.

证明 设$f(z)=f_1(z)-f_2(z)$，$f(z)$在D内解析. 由连续性，$f(a)=0$.若$f(z)$在D内不恒为零，根据定理2，存在一邻域$V(a;\delta)$ $(\delta>0)$，使得$f(z)$在$V(z_0;\delta)$内除a外没有别的零点. 但是，这是不可能的，因为$f(z)=0$在A上成立. 而a是A的极限点，所以在a的任意邻域内都有A的点z，在这点$f(z)=0$. 所以$f(z)=0$在D内成立，即$f_1(z)=f_2(z)$在D内成立.

唯一性定理表明，在域D内解析且不恒为零的函数，不可能在收敛到D内某一点的点列上为零，也不可能在属于D的曲线或子域上为零. 但需要注意的是，函数的零点可以有属于边界点的极限点，比如$f(z)=\sin\frac{1}{z}$在$D=\mathbf{C}-\{0\}$内解析,它的零点$z_n=\frac{1}{n\pi}$ $(n=\pm1,\pm2,\cdots)$收敛到点$z=0$，这一点是D的边界点.

从上面我们可以看出，解析函数的零点孤立性和唯一性定理都是从解析函数可以展成幂级数这一事实推出来的.在实分析中，一个区间上处处可微的函数不一定可以展成幂级数，比如函数

$$\varphi(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq0;\\ 0\quad, & x=0.\end{cases}$$

在点$x=0$的各级导数都为零，因此$\varphi(x)$在点$x=0$的Taylor级数恒为零. 但是$\varphi(x)$在点$x=0$的邻域内不恒为零. 当然，零点的孤立性与唯一性在实分析中随之也不成立. 比如，我们容易验证实函数

$$\varphi(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq0\ ;\\ 0\quad, & x=0\ .\end{cases}$$

在点$x=0$是可导的，$x_n=\frac{1}{n\pi}$ $(n=1,2,\cdots)$是它的零点，$x_n\to0$ $(n\to\infty)$，但是$\varphi(x)$不恒为零.

3. 初等函数的 Taylor 展式

在这一段里，我们将导出几个最常用的初等函数的Taylor展式.

(1) 指数函数的 Taylor 展式

设 $f(z)=e^z$，$f(z)$在C上解析，且

$$f^{(n)}(z)=e^z \quad (n=0,1,2,\cdots),$$
$$f^{(n)}(0)=1.$$

所以由（18）式

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots \tag{24}$$

在C上成立.

(2) 对数函数的Taylor展式

由前一节例6，我们已知

$$-\log(1-z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n},$$
$$|z|<1;\quad -\pi<\arg(1-z)<\pi.$$

将z易为$-z$，就得到

$$\log(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n,$$
$$|z|<1,\quad -\pi<\arg(1+z)<\pi. \tag{25}$$

(3) 幂函数的 Taylor 展式

设$f(z)=z^\alpha$，按定义$z^\alpha=e^{\alpha \mathrm{Log} z}$是多值函数. 若$\mathrm{Log} z$在除去负实轴的平面C上取主值，则得到$z^\alpha$的一个解析分支$e^{\alpha\log z}$，下面我们求出它在点 $z=1$ 的Taylor展式.

$$f(z)=e^{\alpha\log z},\qquad f(1)=1,$$

$$f'(z)=e^{\alpha\log z}\frac{\alpha}{z}=\alpha e^{(\alpha-1)\log z},$$

一般地，可归纳地得到

$$f^{(n)}(z)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)e^{(\alpha-n)\log z}$$

$$n=1,2,\cdots,$$

$$f^{(n)}(1)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)=C_\alpha^n\cdot n!.$$

所以由(18)式得到

$$z^\alpha=1+C_\alpha^1(z-1)+C_\alpha^2(z-1)^2+\cdots+C_\alpha^n(z-1)^n+\cdots$$

$$(|z-1|<1), \tag{26}$$

若将$z-1$易为z，则

$$(1+z)^\alpha=1+C_\alpha^1 z+C_\alpha^2 z^2+\cdots+C_\alpha^n z^n+\cdots \quad (|z|<1). \tag{27}$$

注意，仅当α为正整数时，z^α是全平面上的单值函数．它在点$z=0$的Taylor级数就是它自身．

(4) **三角函数$\cos z$，$\sin z$的Taylor展式**

这两个函数都是在C上解析，由(24)式可得

$$\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}, \tag{28}$$

$$\sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} \tag{29}$$

在C上成立．

习　题

1．求下列函数在点 $z=0$ 的Taylor展式：

(1) $\dfrac{z}{z^2-4z+13}$；　(2) $\sin^2 z$；

(3) $\log(z^2-3z+2)$；　(4) $\arctan z$（主値）；

(5) $\dfrac{1}{2}\left(\log\dfrac{1}{1-z}\right)^2$；　(6) $\sin\dfrac{1}{1-z}$（至第四项）；

(7) $e^{\frac{z}{1-z}}$（至第四项）；　(8) $\sqrt{z+i}$ $\left(\sqrt{i}=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$.

2．求$\log z$在点 $z=i$ 处的Toylor展式．

3．求下列函数在点$z=1$的Taylor展式：

(1) $\sqrt{z}$ $(\sqrt{1}=1)$；　　(2) $\sin(2z-z^2)$；

(3) $\dfrac{z}{z^2-2z+5}$；　　(4) $\dfrac{z^2}{(z+1)^2}$．

4．证明

(1) 对任意复数z，$|e^z-1|\leqslant e^{|z|}-1\leqslant|z|e^{|z|}$；

(2) 当$0<|z|<1$时，

$$\frac{1}{4}|z|<|e^z-1|<\frac{7}{4}|z|.$$

5．在原点解析且满足下面取值条件的函数$f(z)$存在吗?

(1) $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{n}{n+1}$；

(2) $f\left(\dfrac{1}{2n}\right)=0$，　$f\left(\dfrac{1}{2n-1}\right)=1$；

(3) $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=f\left(-\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n^2}$；

(4) $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=f\left(-\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n^3}$．

6．设函数$f(z)$在圆$|z|<R$内解析，

$$S_n(z)=f(0)+f'(0)z+\frac{1}{2!}f''(0)z^2+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)z^n,$$

求证

$$S_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}f(\zeta)\frac{\zeta^{n+1}-z^{n+1}}{(\zeta-z)\zeta^{n+1}}d\zeta,$$

$$R_n(z)=f(z)-S_n(z)$$
$$=\frac{z^{n+1}}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}(\zeta-z)}d\zeta,$$

其中$|z|<r<R$.

7．证明：若函数$f(z)$在圆环$0<|z-a|<R$内解析，且

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=0,$$

则$f(z)$在圆$|z-a|<R$内解析.

8．利用上节习题12重新证明Liouville定理与最大模原理.

9．设函数 $f(z)=u+iv=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 在圆 $|z|<R$内解析，$r<R$，求证

(1) $\pi r^n c_n=\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})e^{-ni\theta}d\theta,\qquad n\geqslant 1$；

(2) $|c_n|r^n\leqslant\max\{4A(r),\ 0\}-2\mathrm{Re}\,f(0)$，

其中$A(r)=\max\limits_{|z|=r}\mathrm{Re}\,f(z)$.

10．设函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$在圆$|z|<1$内解析，并且$\mathrm{Re}f(z)\geqslant 0$，$f(0)=1$，求证

(1) $|c_n|\leqslant 2$；

(2) $\frac{1-|z|}{1+|z|}\leqslant|f(z)|\leqslant\frac{1+|z|}{1-|z|}$.

11．将函数$f(z)=\frac{z}{e^z-1}$展为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}z^n$，证明

$$a_0+C_{n+1}^1a_1+C_{n+2}^2a_2+\cdots+C_{n+1}^na_n=0.$$

利用 $f(z)+\frac{1}{2}z$为偶函数，证明$a_1=-\frac{1}{2}$，$a_{2n+1}=0$（$n=1$，$2,\cdots$），由此得到

$$\frac{1}{e^z-1}=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}B_n}{(2n)!}z^{2n-1}$$

$$(|z|<2\pi),$$

其中$B_n=(-1)^{n-1}a_{2n}$称为Bernoulli数．

12．证明

$$z\cot z=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}B_n}{(2n)!}z^{2n}\quad(|z|<\pi).$$

提示：利用$z\cot z=iz+\dfrac{2iz}{e^{2iz}-1}$.

13．证明

$$\tan z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!}z^{2n-1}$$

$$(|z|<\frac{\pi}{2}).$$

提示：利用 $\cot 2z=\dfrac{1}{2}\cot z-\dfrac{1}{2}\tan z$.

14．求证展式

$$\frac{1}{1-z-z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$$

的系数 c_n 满足条件：

$$c_0=c_1=1,\qquad c_n=c_{n-1}+c_{n-2}\qquad(n\geqslant 2)$$

(c_n称为Fibonacci数)．并求出幂级数的收敛半径．

15．设函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 在圆 $|z|<1$ 内单叶解析，圆 $|z|<r$在映照$f(z)$下的像是G．求证G的面积

$$S=\pi\sum_{n=1}^{\infty}n|c_n|^2r^{2n}.$$

§3 Laurent 级数

前面我们讨论了幂级数，它是研究解析函数的工具．这一节我们要讨论幂级数的推广，即Laurent级数，它是研究解析函数奇点的重要工具．

1. 解析函数的Laurent展式

我们称级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{30}$$

为Laurent级数，其中c_n是复常数，称为(30)的系数，a是常数．当$c_{-n}=0$ $(n\geqslant 1)$时，(30)就是幂级数．

我们称级数(30)在点$z=z_0$收敛，如果级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{31}$$

和

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} \tag{32}$$

在点$z=z_0$都收敛．

级数(31)是一个幂级数，设其收敛半径为R．若$R>0$，则级数(31)在圆$|z-a|<R$内绝对收敛，在圆$|z-a|<R$内闭一致收敛，和函数在圆$|z-a|<R$内解析．

对于级数(32)，若设$\zeta=1/z-a$，则(32)为

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n. \tag{33}$$

它是ζ的幂级数，设其收敛半径为λ．若$\lambda>0$，则(33)在$|\zeta|<\lambda$内绝对收敛，在$|\zeta|<\lambda$内闭一致收敛．因此(32)在$r=\frac{1}{\lambda}<|z-a|$

$<+\infty$内绝对收敛，在 $r<|z-a|<+\infty$内闭一致收敛，和函数在$r<|z-a|<+\infty$内解析.

所以，对于级数(30)来说，只有以下两种情况：1) $r\geqslant R$. 这时级数(30)处处发散，在$r=R$时级数(30)可能除去圆周$|z-a|=R$上的点外是发散的. 比如级数 $\sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$在圆周$|z|=1$上处处收敛，$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}z^n$在圆周$|z|=1$处处发散，$\sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{z^n}{n}$在圆周$|z|=1$上除点$z=1$外处处收敛；2) $r<R$. 则级数(30)在圆环D: $r<|z-a|<R$内绝对收敛，内闭一致收敛（特别地，当$r=0$, $R=+\infty$时，级数(30)在$\mathbf{C}$上除去a外，处处收敛），在D外发散. 在这种情况下，级数(30)的收敛范围是一个圆环，称为级数(30)的收敛圆环（当$R=+\infty$时，理解为广义圆环$r<|z-a|<+\infty$). 根据§1的Weierstrass定理，级数(30)的和函数$f(z)$在圆环$r<|z-a|<R$内是解析的.

若设

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n, \tag{34}$$

$$\psi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-a)^{-n}, \tag{35}$$

那么函数$\varphi(z)$在圆$|z-a|<R$内解析，$\psi(z)$在圆环$r<|z-a|<+\infty$内解析，

$$f(z)=\varphi(z)+\psi(z). \tag{36}$$

我们称级数(31)为Laurent级数(30)的解析部分，称级数(32)为Laurent级数(30)的主要部分或奇异部分. 综上所述，我们有以下定理.

定理1 设Laurent级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{37}$$

的收敛圆环为D：$r<|z-a|<R$，则(37)在D内绝对收敛，在D内闭一致收敛，和函数$f(z)$在D内解析.

下面证明定理1的逆定理也成立.

定理2 若函数$f(z)$在圆环D：$r<|z-a|<R$ $(0\leqslant r<R\leqslant +\infty)$内解析，则

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n, \tag{38}$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta \quad (r<\rho<R). \tag{39}$$

并且展式(38)是唯一的，称它为$f(z)$在D内的Laurent展式.

证明 首先我们注意到(39)式中的积分与ρ无关$(r<\rho<R)$. 事实上，若$r<\rho_1<\rho_2<R$，由于函数$\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}$在D内解析，所以由第三章§2定理3得到

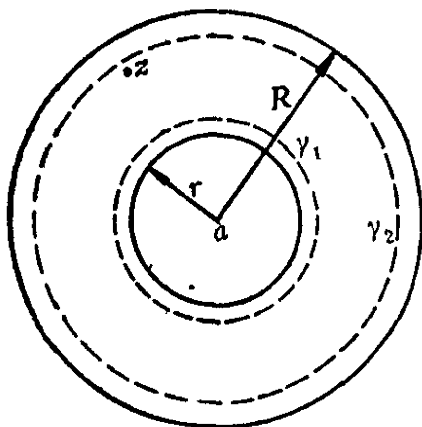


图 4-6

$$\int_{|z-a|=\rho_1}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz=\int_{|z-a|=\rho_2}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz. \tag{40}$$

设z是D内任意一点，在D内取两个圆周γ_1：$|z-a|=r_1$，γ_2：$|z-a|=r_2$ $(r_1<r_2)$，使得z在圆环$r_1<|z-a|<r_2$内(图4-6). 由第三章§3定理2，

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right). \tag{41}$$

当$\zeta\in\gamma_1$时，

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{-1}{(z-a)\left(1-\frac{\zeta-a}{z-a}\right)},$$

$$\frac{1}{\zeta-z}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta-a)^{n-1}}{(z-a)^n}. \tag{42}$$

因为$\left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right|=\frac{r_1}{|z-a|}<1$，所以(42)式右边的级数在$\gamma_1$上一致收敛．当$\zeta\in\gamma_2$时，

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-a)\left(1-\frac{z-a}{\zeta-a}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}. \tag{43}$$

因为$\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|=\frac{|z-a|}{r_2}<1$，所以(43)式右边的级数在$\gamma_2$上一致收敛．将(42)与(43)式代入(41)式，根据§1的定理2得到

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\cdot(z-a)^n$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-n+1}}d\zeta\cdot(z-a)^{-n}. \tag{44}$$

再由(40)式就有

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

其中c_n由(39)式表示．

现在证明唯一性．设$f(z)$在D内还可以展为另一个Laurent级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n'(z-a)^n \quad (r<|z-a|<R). \tag{45}$$

由定理1,(45)式右边的Laurent级数在圆周$|z-a|=\rho\ (r<\rho<R)$上一致收敛到$f(z)$. 用$\frac{1}{(z-a)^{m+1}}$乘(45)式的两边，然后在圆周$|z-a|=\rho$上积分. 因为一致收敛的级数可以逐项积分，所以从(45)式得到

$$\int_{|z-a|=\rho}\frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}}dz$$

$$=\sum_{-\infty}^{\infty}c_m'\int_{|z-a|=\rho}(z-a)^{n-m-1}dz=2\pi i c_m'.$$

因为

$$\int_{|z-a|=\rho}(z-a)^m dz=\begin{cases}2\pi i, & m=-1;\\ 0, & m\neq -1,\end{cases}$$

于是

$$c_m'=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}\frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}}dz=c_m$$

$$(m=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

定理证毕.

与幂级数一样，任意一个Laurent级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$ 总是它的和函数$f(z)$在它的收敛圆环 $r<|z-a|<R$ 内的 Laurent展式.

例1 求函数 $f(z)=\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$在 1) $1<|z|<2$; 2) $2<|z|<+\infty$的Laurent展式.

$$f(z)=\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}=\frac{1}{z-2}-\frac{2}{z^2+1}.$$

当$1<|z|<2$时，

$$f(z)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{2}{z^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n-\frac{2}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{z^2}\right)^n,$$

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n}}$$

$$(1<|z|<2).$$

当$2<|z|<+\infty$时，

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{2}{z^2}\ \frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n}}.$$

$$f(z)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c_{-m}}{z^m},$$

其中

$$c_{-m}=\begin{cases}2^{2n}, & m=2n+1;\\ 2^{2n-1}+2(-1)^n, & m=2n.\end{cases}$$

c_n也可以用公式(39)算出.

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho>2}\frac{z^2-2z+5}{z^{n+1}(z-2)(z^2+1)}dz.$$

当$n\geqslant 0$时，$c_n=o\left(\frac{1}{\rho^{n+1}}\right)\to 0\ (\rho\to+\infty)$,所以$c_n=0$;当$n\leqslant -1$

时，记$m=-n\geqslant 1$，

$$c_{-m}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho>2}\frac{z^{m-1}(z^2-2z+5)}{(z-2)(z^2+1)}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho>2}\left(\frac{z^{m-1}}{z-2}-\frac{2z^{m-1}}{z^2+1}\right)dz$$

$$=2^{m-1}-\frac{2}{2\pi i}\int_{|z|=\rho>2}\frac{z^{m-1}}{z^2+1}dz.$$

当$|z|>1$时，

$$\frac{z^{m-1}}{z^2+1}=\frac{z^{m-3}}{1+\frac{1}{z^2}}$$

$$=z^{m-3}\left(1-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^6}+\cdots\right).$$

因此，当$m=2k+1$时，

$$\int_{|z|=\rho>2}\frac{z^{m-1}}{z^2+1}dz=0.$$

当$m=2k$时，

$$\int_{|z|=\rho>2}\frac{z^{m-1}}{z^2+1}dz=(-1)^{k-1}.$$

所以

$$c_{-m}=\begin{cases}2^{2k}, & m=2k+1;\\ 2^{2k-1}+2(-1)^k, & m=2k.\end{cases}$$

2. 孤立奇点

若函数$f(z)$在a点的邻域内，除去a点外是解析的，即$f(z)$在无心圆D：$0<|z-a|<R$内解析，则称a点是$f(z)$的一个孤立奇点．为了下面叙述方便，若点$z=a$是函数$f(z)$的一个孤立奇

点，那么我们说a点的邻域时，总是不包含a点本身，即a 点的无心邻域．

设 a 是$f(z)$的孤立奇点，由定理2（现在是 $r=0$），$f(z)$在$0<|z-a|<R$内可展为Laurent级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n, \tag{46}$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta \tag{47}$$

$$(0<\rho<R,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

级数

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n\quad(|z-a|<R) \tag{48}$$

是$f(z)$的Laurent展式的解析部分．$\varphi(z)$在圆内$|z-a|<R$内解析．级数

$$\psi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-a)^{-n}\quad(0<|z-a|<+\infty), \tag{49}$$

是$f(z)$的Laurent展式的主 要 部分．$\psi(z)$在$0<|z-a|<+\infty$内解析，

$$f(z)=\varphi(z)+\psi(z). \tag{50}$$

下面分三种情形来讨论$f(z)$在a点邻域内的性质．

1） $\lim\limits_{z\to a}f(z)$存在(有穷)，其充要条件是$\psi(z)$的展式(49)的系数c_{-n}全等于零．在这种情形下$f(z)=\varphi(z)$在$0<|z-a|<R$成立．因为$\varphi(z)$在圆$|z-a|<R$内解析，所以称a为$f(z)$的可去奇点．

证明 充分性是显然的，因为$f(z)=\varphi(z)$在$0<|z-a|<R$成立，所以$\lim\limits_{z\to a}f(z)=\varphi(a)$.

现在我们来证明必要性．若$\lim\limits_{z\to a}f(z)$ 存在（有穷），那么存在

$\delta>0$和一正数M，使得当$0<|z-a|<\delta<R$时，

$$|f(z)|\leqslant M.$$

由(49)式得到

$$|c_{-n}|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho<\delta}f(z)(z-a)^{n-1}dz\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}M\rho^{n-1}\cdot 2\pi\rho=M\rho^{n}\quad(n=1,2,\cdots).$$

令$\rho\to+0$，得到$c_{-n}=0\ (n=1,2,\cdots)$，所以$\psi(z)\equiv 0$.

注意，从上面的证明可以看出，要使点$z=a$是$f(z)$的可去奇点，只要求$f(z)$在孤立奇点a的邻域内有界．实际上我们证明了下述定理．

Riemann定理 若函数$f(z)$在孤立奇点a的邻域内有界，则a是$f(z)$的可去奇点．

2) $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$，其充要条件是$\psi(z)$的展式(49)的系数$c_{-n}$只有有穷多个不为零．在这种情况下，

$$\psi(z)=\frac{c_{-1}}{z-a}+\cdots+\frac{c_{-m}}{(z-a)^{m}},\quad c_{-m}\neq 0,\tag{51}$$

$$f(z)=\varphi(z)+\psi(z)$$

$$=\frac{c_{-m}}{(z-a)^{m}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_{0}+c_{1}(z-a)+\cdots.$$

或写成

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)^{m}}g(z),\tag{52}$$

其中

$$g(z)=c_{-m}+c_{m+1}(z-a)+\cdots,\qquad c_{-m}=g(a)\neq 0,\tag{53}$$

所以我们称a是$f(z)$的一个m级极点．当$m=1$时，称a为$f(z)$的一个简单极点．

证明 充分性是显然的，因为由(52)式与(53)式，$\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$。

现在证明必要性．若$\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$，那么存在$\delta>0$，使得在$0<|z-a|<\delta$内，$f(z)\neq 0$．于是在$0<|z-a|<\delta$内，函数$F(z) = 1/f(z)$解析，且不为零．由于$\lim\limits_{z\to a} F(z)=0$，根据1)，$a$是$F(z)$的可去奇点，而且是$F(z)$的一个零点．设$a$是$F(z)$的$m$级零点，

$$F(z)=(z-a)^m\lambda(z),$$

其中$\lambda(z)$在圆$|z-a|<\delta$内解析，且不妨设在此邻域内不为零．因而$1/\lambda(z)$在圆$|z-a|<\delta$内解析，且不为零，其Taylor展式为

$$\frac{1}{\lambda(z)}=c_{-m}+c_{-m+1}(z-a)+\cdots$$

$$(c_{-m}\neq 0,\ |z-a|<\delta).$$

于是

$$f(z)=\frac{1}{F(z)}=\frac{1}{(z-a)^m}\cdot\frac{1}{\lambda(z)},$$

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\cdots+\frac{c_{-1}}{(z-a)}+c_0+c_1(z-a)+\cdots.$$

由Laurent展式的唯一性，必要性得证．

注意，从上面的证明我们看到，若a是$f(z)$的m级极点，则a是$1/f(z)$的m级零点．反之亦然．

3) $\lim\limits_{z\to a} f(z)$不存在，其充要条件是级数(49)的系数$c_{-n}$有无穷多个不为零．这时，我们称$a$是$f(z)$的一个本性奇点．

证明 由1)与2)的结果立即得到3)．

例2 $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$．$z=0$是$f(z)$的本性奇点，因为

$$\lim_{z=x\to+0} e^{\frac{1}{z}}=+\infty,\qquad \lim_{z=x\to-0} e^{\frac{1}{z}}=0,$$

所以$\lim\limits_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}}$不存在．$f(z)$在点$z=0$的邻域内Laurent展式为

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}+\cdots\quad(z\neq 0).$$

下面的定理揭示了解析函数在本性奇点的邻域 内 的 重 要特性.

定理3（Weierstrass）若a是$f(z)$的本性奇点，则对于任意一个有穷复数A和数$\varepsilon>0$，在$0<|z-a|<\delta$内有一点z，使得

$$|f(z)-A|<\varepsilon.$$

即$f(z)$在本性奇点的邻域内的取值在C上是稠密的①（称集E为在C上稠密，如果$\overline{E}=\mathbf{C}$）.

证明 用反证法．设A是一有穷复数．若在$0<|z-a|<\delta$内$|f(z)-A|$不能任意地小，则必有正的下界ε_0，即

$$|f(z)-A|\geqslant\varepsilon_0\quad(0<|z-a|<\delta).$$

于是，函数

$$F(z)=\frac{f(z)-A}{z-a}$$

在$0<|z-a|<\delta$内解析，且当$z\to a$时，$F(z)\to\infty$，所以$z=a$是$F(z)$的极点．由 2)，

$$F(z)=\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+\cdots,$$

因此，

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-2}}{z-a}$$

$$+(A+c_{-1})+c_0(z-a)+\cdots,$$

a或者是$f(z)$的$m-1$级极点（若$m>1$），或者是$f(z)$的可去奇点（若$m=1$），这与定理的条件相矛盾．定理证毕.

---

① $f(z)$在$0<|z-a|<\delta$内一定是无界的．因此，存在序列$z_n\to a$，使得$f(z_n)\to\infty$．所以实际上$f(z)$在$0<|z-a|<\delta$中的取值在$\mathbf{C}_\infty$中是稠密的.

定理 3 表明，若函数$f(z)$在 a 点的邻域内不取某个邻域$V(w_0;\delta)$ ($\delta>0$)的值，则a或是$f(z)$的可去奇点，或是 $f(z)$的极点。

Picard(1879)证明了比Weierstrass更一般、更深刻的定理：解析函数在本性奇点的邻域内无穷多次地取到每个有穷复值，至多可能除去一个值(称为 Picard例外值)．我们用3)中的例 2 来说明Picard定理．已知$z=0$是$f(z)=e^{\frac{1}{z}}$的本性奇点．因为$e^{\frac{1}{z}}\neq 0$，所以$z=0$是它的例外值．对于每个有穷复数$A\neq 0$，若取

$$z_n=\frac{1}{\log A+2n\pi i}\to 0,\ 则 f(z_n)=A.$$

以上讨论了有穷孤立奇点邻域内函数的性质，现在我们来讨论函数在无穷远点邻域内的性质．

若函数$f(z)$在域D_z：$R<|z|<+\infty$ ($R>0$)内解析，则称$z=\infty$为$f(z)$的一个孤立奇点．

设$z=\infty$是$f(z)$的一个孤立奇点．为了研究$f(z)$在$z=\infty$邻域内的性质，我们作变换$\zeta=1/z$，将$z=\infty$的邻域变为点$\zeta=0$的邻域（图4-7)．函数

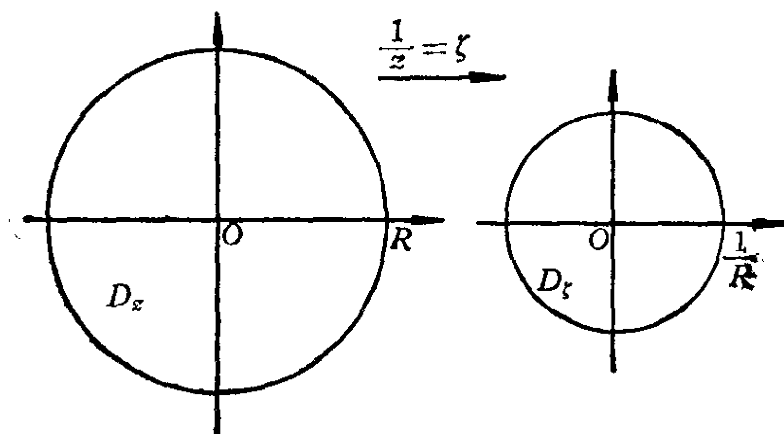


图 4-7

$$g(\zeta)=f(z)=f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

在$D_\zeta: 0<|\zeta|<1/R$内解析，$\zeta=0$是它的一个孤立奇点．由定理2，$g(\zeta)$可以展为Laurent级数

$$g(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n}\zeta^n \quad \left(0<|\zeta|<\frac{1}{R}\right),$$

其中

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho<\frac{1}{R}} \frac{g(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta .$$

于是

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}, \tag{54}$$

其中

$$c_n=\frac{-1}{2\pi i}\int_{|z|=\frac{1}{\rho}>R} f(z)\cdot\frac{1}{z^{n-1}}\left(-\frac{1}{z^2}\right)dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho_1>R}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz. \tag{55}$$

级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_{-n}\zeta^n$是$g(\zeta)$的 Laurent 展式的解析部分，其和函数在圆$|\zeta|<1/R$内解析，所以

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n} \tag{56}$$

在$R<|z|<+\infty$内解析，我们称级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}$为 Laurent 级数(54)的解析部分．而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{\zeta^n}$是$g(\zeta)$的Laurent 级数的主要部分，其和函数在$0<|\zeta|<+\infty$内解析，所以

$$\psi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^n \tag{57}$$

在$|z|<+\infty$内解析，我们称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n z^n$为 Laurent 级数(54)的主要部分．在$R<|z|<+\infty$内，有

$$f(z)=\varphi(z)+\psi(z)\ . \tag{58}$$

由于$z\to\infty$相应于$\zeta\to 0$，因此，如果$\zeta=0$是$g(\zeta)=f(1/\zeta)$的可去奇点、极点（m级）、本性奇点，我们就相应地称$z=\infty$为$f(z)$的可去奇点、极点（m级）、本性奇点．如果$z=\infty$是$f(z)$的可去奇点，我们也称$f(z)$在$z=\infty$是解析的．

由前面1)—3)的讨论可知，$z=\infty$分别是$f(z)$的可去奇点、极点、本性奇点．即$\lim\limits_{z\to\infty}f(z)$有穷、无穷、不存在．亦即$f(z)$在$z=\infty$邻域内的 Laurent 展式的系数$c_n(n=1,2,\cdots)$全为零、只有有穷多个不为零、有无穷多个不为零．因此，

1）当$z=\infty$是$f(z)$的可去奇点时，

$$f(z)=c_0+\frac{c_{-1}}{z}+\frac{c_{-2}}{z^2}+\cdots\ .$$

特别地，若

$$c_0=f(\infty)=c_{-1}=\cdots=c_{-(m-1)}=0,\qquad c_{-m}\neq 0,$$

则称$z=\infty$是$f(z)$的一个m级零点，这时

$$f(z)=\frac{1}{z^m}\left(c_{-m}+c_{-(m+1)}\frac{1}{z}+\cdots\right)=\frac{1}{z^m}f_1(z)\ ,$$

其中$f_1(z)$在$z=\infty$解析，且$f_1(\infty)\neq 0$．

2）当$z=\infty$是$f(z)$的m级极点时，

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}+c_1 z+c_2 z^2+\cdots+c_m z^m,\qquad c_m\neq 0,$$

$$f(z)=z^m\left(c_m+\frac{c_{m-1}}{z}+\frac{c_{m-2}}{z^2}+\cdots\right)=z^m f_2(z),$$

其中$f_2(z)$在$z=\infty$解析，且$f_2(\infty)\neq 0$.

3）当$z=\infty$是$f(z)$的本性奇点时，

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^n.$$

3. 整函数与亚纯函数

若函数$f(z)$在有穷平面**C**上解析，则称$f(z)$是一整函数．对于一个整函数$f(z)$，它的Taylor展式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n \tag{59}$$

在**C**上成立.另一方面，$z=\infty$是$f(z)$的孤立奇点，由 Laurent 展式的唯一性，(59)也是$f(z)$在无穷远点邻域内的Laurent 展式．若$z=\infty$是$f(z)$的可去奇点，或者说$f(z)$ 在$z=\infty$解析，由 1) 可得，$c_n=0\ (n\geqslant 1)$，那么$f(z)$一定是一个常数，所以我们有如下的定理．

定理4 若函数$f(z)$在 $\mathbf{C}_\infty$上解析，则$f(z)$必为常数．

若$z=\infty$是$f(z)$的一个m级极点．那么$c_n=0\ (n>m)$，$f(z)$是一个m次多项式，

$$f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_mz^m,\quad c_m\neq 0.$$

若$z=\infty$是$f(z)$的一个本性奇点，那么

$$f(z)=c_0+c_1z+\cdots+c_nz^n+\cdots,$$

其中 $c_n(n\geqslant 1)$ 有无穷多个不为零．在这种情况下，我们 称$f(z)$是超越整函数．例如e^z，$\sin z$，$\cos z$等等都是超越整函数．

总之，一个整函数，根据$z=\infty$是它的可去奇点、极点（m级）、本性奇点，就决定它是常数、多项式（m次）或者是超越整函数．

若函数$f(z)$在有穷平面**C**上最多除去极点外，沒有其他的奇点，则称$f(z)$是一个亚纯函数．特别地，整函数是亚纯函数．有

理函数

$$f(z)=\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$$

是亚纯函数，其中$P_n(z)$，$Q_m(z)$是两个既约多项式，

$$P_n(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n,\qquad a_n\neq 0,$$
$$Q_m(z)=b_0+b_1z+\cdots+b_mz^m,\qquad b_m\neq 0.$$

$Q_m(z)$的零点是$f(z)$的极点，在C上除去这有穷个极点外，$f(z)$是解析的． 因为

$$f(z)=\frac{1}{z^{m-n}}\cdot\frac{a_n+\dfrac{a_{n-1}}{z}+\cdots+a_0}{b_m+\dfrac{b_{m-1}}{z}+\cdots+b_0},$$

所以

$$\lim_{z\to\infty}f(z)=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m}, & n=m;\\ \infty, & n>m;\\ 0, & n<m.\end{cases}$$

即$z=\infty$或是$f(z)$的可去奇点，或是$f(z)$的极点．

下面的定理说明其逆亦眞．

定理5 若$z=\infty$是亚纯函数$f(z)$的可去奇点或极点，则$f(z)$必是有理函数．

证明 由于$z=\infty$是$f(z)$的可去奇点或极点，所以存在正数R，使得$f(z)$在$R<|z|<+\infty$内解析．设它在$z=\infty$邻域内Laurent展式的主要部分为$P(z)$．当$z=\infty$是$f(z)$的可去奇点时，$P(z)\equiv 0$；当$z=\infty$是$f(z)$的极点时，$P(z)$是一多项式．

在圆$|z|\leqslant R$上，$f(z)$只能有有穷多个极点①．因为，假如$f(z)$有无穷多个极点，那么由Bolzano-Weierstrass定理，这无穷

① 一般地，在任意有界域D内，$f(z)$只能有有穷多个极点．

多个极点必有一个极限点z_0，z_0在闭圆$|z|\leqslant R$上。显然，z_0就是$f(z)$的一个非孤立奇点了，但这是不可能的，因为$f(z)$是亚纯函数。

设$z_1, z_2, \cdots, z_k$是$f(z)$的极点。在z_i（$i=1,2,\cdots,k$）的邻域内$f(z)$的Laurent展式的主要部分为

$$\psi_i(z)=\frac{c_{-1}^{(i)}}{z-z_i}+\cdots+\frac{c_{-m_i}^{(i)}}{(z-z_i)^{m_i}} \quad (i=1,2,\cdots,k),$$

解析部分为$\varphi_i(z)$（$i=1,2,\cdots,k$）。于是，函数

$$F(z)=f(z)-P(z)-\sum_{i=1}^{k}\psi_i(z)$$

在C_∞上除去$z_1, z_2, \cdots, z_k, \infty$外是解析的，而且，这些点是$F(z)$的可去奇点。事实上，当$z\to z_i$时，

$$\lim_{z\to z_i}(f(z)-\psi_i(z))=\varphi_i(z_i).$$

而$\sum_{m\neq i}\psi_m(z)-P(z)$在$z_i$是解析的，所以$\lim_{z\to z_i}F(z)$存在（有穷）。在$z=\infty$，$f(z)-P(z)$是$f(z)$在$z=\infty$邻域内Laurent展式的解析部分，所以$\lim_{z\to\infty}(f(z)-P(z))$有穷，而$\lim_{z\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\psi_i(z)=0$。于是，$\lim_{z\to\infty}F(z)$有穷，$F(z)$在$C_\infty$上解析。根据定理4，$F(z)\equiv C$（常数），即

$$f(z)=C+P(z)+\sum_{i=1}^{k}\psi_i(z).$$

故$f(z)$是有理函数。

从上面我们可以看出，任意一个有理函数，总可以分解为部分分式，并且这种分解是唯一的。

除去有理函数外的其他亚纯函数，称为超越亚纯函数。由定理5，对于超越亚纯函数来说，$z=\infty$或者是它的一个本性奇点，如e^z，$\sin z$等等；或者是它的极点的极限点，如$1/(e^z-1)$，$\tan z$等等。

习　题

1. 将下列函数在指定的域内展为Laurent级数：

(1) $\dfrac{1}{z^2(z-i)}$,　$0<|z-i|<1$;

(2) $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$,　$0<|z-2|<1$,　$0<|z-1|<1$,
$1<|z|<2$,　$2<|z|<+\infty$;

(3) $\dfrac{z^2-1}{(z+2)(z+3)}$,　$2<|z|<3$,　$3<|z|<+\infty$;

(4) $\log\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)$,　$\max(|a|, |b|)<|z|<+\infty$;

(5) $e^{\frac{1}{1-z}}$,　$1<|z|<+\infty$ (前四项);

(6) $z^2e^{\frac{1}{z}}$,　$0<|z|<+\infty$;

(7) $\sin\dfrac{z}{1-z}$,　$0<|z-1|<+\infty$;

(8) $\sqrt{\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}}$　(在$1<z<2$上虚部为正的),

$$1<|z|<2.$$

2. 下列函数是否可以在指定点的邻域内展为Laurent级数：

(1) $\cos\dfrac{1}{z}$,　$z=\infty$;

(2) $\tan z$,　$z=\infty$;

(3) $\mathrm{Log}[(z-1)(z-2)]$,　$z=\infty$;

(4) $\dfrac{z^2}{\sin(1/z)}$,　$z=0$;

(5) $\log\frac{1}{z-1}$, $z=\infty$;

(6) $\sqrt[3]{(z-1)(z-2)(z-3)}$, $z=\infty$;

(7) $\sqrt{\frac{z}{(z-2)(z-1)}}$, $z=\infty$.

3. 下列函数有哪类奇点，若是极点，求出其级.

(1) $\frac{1}{\sin z-\cos z}$;　　(2) $\frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{e^z-1}$;

(3) $\sin\frac{1}{1-z}$;　　(4) $\tan z$.

4. 若z_0是$f(z)$的本性奇点，且$f(z)\neq 0$，则z_0也是$1/f(z)$的本性奇点.

5. 函数 $e^{\frac{z}{2}(\zeta-\frac{1}{\zeta})}$在 $\zeta=0$ 的 Laurent 展式中的系数称作 Bessel函数$J_n(z)(n\geqslant 0)$. 求证

$$J_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\theta-z\sin\theta)d\theta$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}.$$

6. 若a是函数$\zeta=f(z)$的本性奇点，且 $P(\zeta)$是非常数多项式，则a是$P(f(z))$的本性奇点.

7. 设亚纯函数 $f(z)$ 在扩充平面上只有两个极点：$z=-1$ 是它的一级极点，其主要部分是$\frac{1}{z+1}$，$z=2$是它的二级极点，其主要部分是$\frac{2}{z-2}+\frac{3}{(z-2)^2}$，且 $f(0)=\frac{7}{4}$. 求 $f(z)$ 在 $1<|z|<2$的 Laurent 展式.

8. 证明

(1) $\dfrac{\pi^2}{\sin^2\pi z}$与$h(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{(z-n)^2}$在整数点的邻域内有相同的主要部分;

(2) $g(z)=\dfrac{\pi^2}{\sin^2\pi z}-h(z)$ 在C上有界．由此推出

$$\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2}.$$

第五章　留数定理及其应用

留数概念是复变函数论中的重要概念之一，它有着广泛的应用．本章先叙述有关留数的一般理论，然后给出它的一些应用．

§1　留数定理

1．留数的定义与计算

设函数$f(z)$在$0<|z-a|<r$内解析，a是$f(z)$的孤立奇点．函数$f(z)$在孤立奇点的留数，记作$\mathrm{Res}(f,a)$，定义为

$$\mathrm{Res}(f,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}f(z)dz,\qquad (1)$$

其中$0<\rho<r$．根据前一章§3的定理2，$f(z)$在a点的邻域内可展为Laurent级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n,$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz.$$

因此

$$\mathrm{Res}(f,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}f(z)dz=c_{-1}.\qquad (2)$$

若$z=\infty$是$f(z)$的孤立奇点，即$f(z)$在$R<|z|<+\infty$内解析，

我们定义$f(z)$在$z=\infty$的留数为

$$\operatorname{Res}(f,\infty)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}f(z)dz, \qquad (3)$$

其中$R<\rho<+\infty$. 由于$f(z)$在$z=\infty$邻域内可展为Laurent级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n z^n,$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz,$$

所以

$$\operatorname{Res}(f,\infty)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}f(z)dz=-c_{-1}. \qquad (4)$$

于是，如果我们知道函数$f(z)$在孤立奇点$z=a$（有穷或无穷）的Laurent展式，那么我们就知道$f(z)$在a点的留数.

若a是$f(z)$的可去奇点，且$a\neq\infty$，则$\operatorname{Res}(f,a)=0$；但是，若$a=\infty$，那么$\operatorname{Res}(f,a)$不一定为零. 比如，$f(z)=1+\frac{1}{z}$，它在无穷远点的留数是$-1$，尽管$f(z)$在$z=\infty$是解析的.

若$a\neq\infty$是$f(z)$的$m(m\geqslant 1)$级极点，那么$f(z)$在a点的留数可以由下面的方法简便地求出. 这时$f(z)$在a点邻域内可写成

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)^m}g(z), \qquad (5)$$

其中$g(z)$在a点是解析的，且$g(a)\neq 0$，$g(z)$在a点的邻域内可展为Taylor级数

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}g^{(n)}(a)(z-a)^n.$$

于是

$$\mathrm{Res}(f,a)=c_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}g^{(m-1)}(a). \tag{6}$$

若将$g(z)$的Taylor展式代入(5)式中

$$(z-a)^m f(z)=g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n,$$

等式两边微商 $m-1$ 次，并令 $z\to a$，我们就得到 $g^{(m-1)}(a)$，所以

$$\mathrm{Res}\,(f,a)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\{(z-a)^m f(z)\}. \tag{7}$$

特别是，当$m=1$时，

$$\mathrm{Res}(f,a)=g(a)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z). \tag{8}$$

2. 留数定理

下面我们来叙述关于留数的基本定理.

定理1 设γ是可求长简单闭曲线. 若函数$f(z)$在γ的内部D中除去$z_1,z_2,\cdots,z_n$外是解析的，$z_1,z_2,\cdots,z_n$是$f(z)$的孤立奇点，并且$f(z)$在闭域$\overline{D}$上除去$z_1,z_2,\cdots,z_n$外是连续的，则

$$\int_\gamma f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,z_k). \tag{9}$$

证明 在D内以$z_k(k=1,2,\cdots,n)$为中心作一小圆周γ_k，使得每一个γ_k都在其余圆周的外部，由第三章§2的定理3，

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k}f(z)dz.$$

但是按留数定义

$$\int_{\gamma_k} f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f, z_k),$$

所以(9)式得证.

注意，如果D是由m个可求长简单闭曲线所范围的域，$f(z)$仍然满足定理 1 的条件，则上述公式(9)仍然成立. 这里γ就是组成D的边界的m条可求长简单闭曲线，其方向对于D来说是正向.

定理2 若函数$f(z)$在C上除去点$z_1, z_2, \cdots, z_n$外是解析的，则$f(z)$在所有孤立奇点（包括$z=\infty$在内）的留数之和为零. 即

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k) + \mathrm{Res}(f, \infty) = 0. \qquad (10)$$

证明 以原点为中心，作半径为R的充分大的圆周γ，使得γ的内部包含$z_1, z_2, \cdots, z_n$. 由定理 1，

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k).$$

但是

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)\,dz = -\mathrm{Res}(f, \infty),$$

所以立即得到(10)式. 定理证毕.

例1 $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}e^{imz}$, $m \neq 0$是实常数. $z = \pm i$是$f(z)$的一级极点，$z=\infty$是$f(z)$的本性奇点.

$$\mathrm{Res}(f, i) = \left.\frac{e^{imz}}{z+1}\right|_{z=+i} = \frac{e^{-m}}{2i} = -\frac{i}{2}e^{-m},$$

$$\mathrm{Res}(f, -i) = \left.\frac{e^{imz}}{z-i}\right|_{z=-i} = \frac{i}{2}e^{m},$$

$$\mathrm{Res}(f, \infty) = -\mathrm{Res}(f, i) - \mathrm{Res}(f, -i) = -i\,\mathrm{sh}\,m.$$

例2 $f(z)=\dfrac{(z^2-1)^2}{z^2(z-\alpha)(z-\beta)}$，其中$\alpha\beta=1$，$\alpha\neq\beta$. α,β是$f(z)$的一级极点，$z=0$是$f(z)$的2级极点，$f(z)$在$z=\infty$解析.

$$\mathrm{Res}(f,\alpha)=\frac{(z^2-1)^2}{z^2(z-\beta)}\bigg|_{z=\alpha}$$

$$=\frac{(\alpha^2-1)^2}{\alpha^2(\alpha-\beta)}=\alpha-\beta.$$

$$\mathrm{Res}(f,\beta)=\frac{(z^2-1)^2}{z^2(z-\alpha)}\bigg|_{z=\beta}$$

$$=\frac{(\beta^2-1)^2}{\beta^2(\beta-\alpha)}=\beta-\alpha.$$

为了求出$f(z)$在点$z=0$的留数，我们只要求出$\dfrac{(z^2-1)^2}{(z-\beta)(z-\alpha)}$在点$z=0$的Taylor展式中的一次项系数

$$\frac{(z^2-1)^2}{(z-\alpha)(z-\beta)}$$

$$=\frac{(z^2-1)^2}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{z-\alpha}-\frac{1}{z-\beta}\right)$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}(z^2-1)^2\left\{\frac{1}{\beta}\left(1+\frac{z}{\beta}+\cdots\right)-\frac{1}{\alpha}\left(1+\frac{z}{\alpha}+\cdots\right)\right\}$$

$$=(z^2-1)^2\frac{1}{\alpha-\beta}\left\{\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)+\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right)z+\cdots\right\},$$

由此定出一次项的系数为$\dfrac{1}{\alpha-\beta}\left(\dfrac{1}{\beta^2}-\dfrac{1}{\alpha^2}\right)=\alpha+\beta$，所以

$$\mathrm{Res}(f,0)=\alpha+\beta.$$

由(10)式，

$$\mathrm{Res}(f,\infty)=-(\alpha+\beta).$$

例3 $f(z)=\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$，$z=-1$是$f(z)$的 3 级极点，$z=\infty$是$f(z)$的本性奇点.

$$\mathrm{Res}(f,-1)=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}(\sin 2z)\Big|_{z=-1}$$
$$=-2\sin(-2)=2\sin 2.$$
$$\mathrm{Res}(f,\infty)=-2\sin 2.$$

例4 $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$，$z=1$是$f(z)$的一级极点，$z=0$是$f(z)$的本性奇点，$z=\infty$是$f(z)$的一级零点.

$$\mathrm{Res}(f,1)=-e^{\frac{1}{z}}\Big|_{z=1}=-e.$$

由于当$|z|$充分大时，

$$f(z)=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}e^{\frac{1}{z}}$$
$$=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\cdots\right),$$

所以

$$\mathrm{Res}(f,\infty)=1,$$
$$\mathrm{Res}(f,0)=-\mathrm{Res}(f,1)-\mathrm{Res}(f,\infty)=e-1.$$

从上面几个例子看出，如函数$f(z)$满足定理 2 的条件，当求$f(z)$在各孤立奇点的留数时，我们总是先求出比较容易计算的孤立奇点的留数，然后利用(10)式便可求出较难计算的留数.当然，如果有好几个点上的留数都比较难计算，则仍无法利用(10)式.

习　　题

1．设函数$\varphi(z)$，$\psi(z)$在点$z=a$是解析的，$\varphi(a)\neq 0$，$z=a$是$\psi(z)$的一级零点，证明函数$f(z)=\varphi(z)/\psi(z)$在点$z=a$的留数

$$\operatorname{Res}(f(z),a)=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

2．求下列函数在孤立奇点(包括无穷远点，如果它是孤立奇点)的留数：

(1) $\dfrac{1}{z^3-z^5}$； (2) $\dfrac{1}{(z-z_1)^m(z-z_2)}$ $(z_1\neq z_2$，m是正整数)；

(3) $\dfrac{z^3+z^2+2}{z(z^2-1)^2}$； (4) $\dfrac{z^{2n}}{(z+1)^n}$ (n是正整数)；

(5) $\dfrac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$； (6) $\dfrac{z^{n-1}}{z^n+a^n}$ ($a\neq 0$，n为正整数)；

(7) $\dfrac{1}{\sin z}$； (8) $\sin\dfrac{z}{z+1}$；

(9) $z^3\cos\dfrac{1}{z-2}$； (10) $\cot^2 z$；

(11) $\dfrac{e^z}{z(z-1)}$； (12) $\dfrac{e^{nz}}{z^2+1}$。

3．求下列函数在指定点的留数：

(1) $\dfrac{\sin\alpha z}{z^3\sin\beta z}$ $(\alpha\neq\beta,\beta\neq 0)$，$z=0$；

(2) $\dfrac{1}{(1+z^2)^{n+1}}$，$z=i$；

(3) $\operatorname{Log}\dfrac{z-a}{z-b}$ $(a\neq b)$，$z=\infty$；

(4) $\dfrac{1}{z^2}\,e^{\frac{1}{z}}\operatorname{Log}\dfrac{1-\alpha z}{1-\beta z}$ $(\alpha\neq\beta)$，$z=0$。

4．设C为可求长简单闭曲线，其内部D包含点$z=0$，$f(z)$与$g(z)$在D内是解析的，在$\overline{D}$上连续，$g(z)$在D内只有简单零点a_i，$a_i\neq 0$（$i=1,2,\cdots,n$），求

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z\cdot g(z)}dz.$$

5．设函数$f(z)$，$g(z)$在点$z=a$是解析的，$f(a)\neq 0$，$z=a$是$g(z)$的 2 级零点，求 $\operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{g(z)},a\right)$.

6．若z_k是$f(z)=\frac{1}{z^4+a^4}$的极点($a\neq 0$)，则

$$\operatorname{Res}(f(z),\ z_k)=-\frac{z_k}{4a^4}.$$

7．若$f(z)$是奇函数，则$\operatorname{Res}(f,a)=\operatorname{Res}(f,-a)$；若$f(z)$是偶函数，则$\operatorname{Res}(f,a)=-\operatorname{Res}(f,-a)$.

8．若函数$\Gamma(z)$在C上除去$z=0,-1,-2,\cdots$外是解析的，这些点是$\Gamma(z)$的一级极点，且$\Gamma(1)=1$，$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$，则

$$\operatorname{Res}(\Gamma(z),\ -n)=\frac{(-1)^n}{n!}.$$

9．设 $z_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$，$f(z)$在包含实轴的域内是解析的，求证

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{\cos^2 z},z_n\right)=f'(z_n).$$

10．求下列积分：

(1) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{dz}{z^3(z^{10}-2)}$,

(2) $\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n}$ ($a \neq b, |a|, |b| \neq 1$，$n$ 为正整数)；

(3) $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(n\theta - \sin\theta)d\theta$ （n是整数），

提示：同时考虑$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \sin(n\theta - \sin\theta)d\theta$；

(4) $\int_{|z|=R} \frac{z^2 dz}{e^{2\pi i z^3} - 1}$，$n < R^3 < n+1$，$n$为正整数；

(5) $\int_{|z|=R} \sqrt{(z-a)(z-b)}dz$ （$a \neq b$），$R > \max(|a|, |b|)$，其中平方根的分支是：在无穷远邻域内为$z + O(1)$.

(6) $\int_{|z|=R} z^n \mathrm{Log}\frac{z-a}{z-b}dz$ （$a \neq b$），$R > \max(|a|, |b|)$，n是正整数.

11．设函数$f(z)$在$z=\infty$是解析的，求$\mathrm{Res}(f^2(z), \infty)$.

12．设$\varphi(z)$在点$z=a$是解析的，且$\varphi'(a) \neq 0$，点$\zeta_0 = \varphi(a)$是函数$f(\zeta)$的简单极点，其留数为A，求$\mathrm{Res}(f[\varphi(z)], a)$.

13．设γ是一条可求长简单闭曲线，D是γ的内部，函数$f(z)$在D内除极点$a_1, a_2, \cdots, a_n$外是解析的，在$\overline{D}$上除$a_1, a_2, \cdots, a_n$外是连续的，$\psi_j(z)$是$f(z)$在a_j （$j=1,2,\cdots,n$）邻域内 Laurent 展式的主要部分，证明

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = f(z) - \sum_{j=1}^n \psi_j(z).$$

徐

14. 设γ是抛物线$2x=y^2$，方向为y的增加方向，$\sqrt{1+z^2}$是在正实轴上取正实数的那个分支，证明

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z^4+1)\sqrt{z^2+1}}=\frac{\pi i}{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}.$$

§ 2　留数定理对亚纯函数的应用.幅角原理与Rouché定理

我们称函数$f(z)$在域D内是亚纯的，如果$f(z)$在D内除去一些极点外是解析的．这些极点可能是有穷多个，也可能是无穷多个．不过，在无穷多个极点的情形下，它们不可能有属于D内的极限点（见第四章§3定理5的证明）．因此，若d是D内的有界子域，其边界也属于D，则亚纯函数$f(z)$在d内只有有穷多个极点．此外，由唯一性定理，$f(z)$在d内的零点也只能有有穷多个．

定理1　若函数$f(z)$是域D内的亚纯函数，γ是D内的可求长简单闭曲线，其内部也属于D，$a_k(k=1,2,\cdots,n)$和$b_j(j=1,2,\cdots,m)$分别是$f(z)$在γ内部的零点和极点，$f(z)$在γ上没有零点和极点，函数$\varphi(z)$在D内解析，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi(a_k)-\sum_{j=1}^{m}\beta_j\varphi(b_j),\tag{11}$$

其中α_k是$f(z)$在零点a_k的级，β_j是$f(z)$在极点b_j的级．

证明　设$F(z)=\varphi(z)f'(z)/f(z)$，$F(z)$在$\gamma$的内部$d$除$a_k$和$b_j$外是解析的，并且在$\bar{d}$上除去$a_k,b_j$外连续，由留数定理，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \text{Res}(F(z), a_k) + \sum_{j=1}^{m} \text{Res}(F, b_j). \tag{12}$$

在d内以a_k为中心作小圆$|z-a_k|<\delta$，在这个小圆内，

$$f(z)=(z-a_k)^{\alpha_k} g(z), \quad g(a_k) \neq 0,$$

求微商得到

$$f'(z)=\alpha_k (z-a_k)^{\alpha_k -1} g(z)+(z-a_k)^{\alpha_k} g'(z).$$

所以在$0<|z-a_k|<\delta$内（由$g(z)$的连续性，不妨设在圆$|z-a_k|<\delta$内$g(z)\neq 0$），

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{\alpha_k}{z-a_k}+\frac{g'(z)}{g(z)}.$$

这表明，不管a_k是$f(z)$的几级零点，a_k总是函数$f'(z)/f(z)$的一级极点，其留数等于α_k。

另一方面，在圆$|z-a_k|<\delta$内，

$$\begin{aligned}\varphi(z)&=\varphi(a_k)+(z-a_k)\varphi'(a_k)+\cdots\\&=\varphi(a_k)+(z-a_k)\varphi_1(z),\end{aligned}$$

其中$\varphi_1(z)$在$|z-a_k|<\delta$内是解析的．所以在$0<|z-a_k|<\delta$内

$$\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{\alpha_k \varphi(a_k)}{z-a_k}+\lambda(z),$$

其中$\lambda(z)=\alpha_k \varphi_1(z)+\varphi(z)\dfrac{g'(z)}{g(z)}$在圆$|z-a_k|<\delta$内是解析的．于是

$$\text{Res}(F, a_k)=\alpha_k \varphi(a_k). \tag{13}$$

在以b_j为中心的小圆环$0<|z-b_j|<\delta$内

$$f(z)=\frac{h(z)}{(z-b_j)^{\beta_j}},$$

$h(z)$在圆$|z-b_j|<\delta$内是解析的，且$h(b_j)\neq 0$．因为

$$f'(z)=\frac{-\beta_j h(z)}{(z-b_j)^{\beta_j+1}}+\frac{h'(z)}{(z-b_j)^{\beta_j}}.$$

所以在$0<|z-b_j|<\delta$内，

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=-\frac{\beta_j}{z-b_j}+\frac{h'(z)}{h(z)}.$$

它表明，不管b_j是$f(z)$的几级极点，$z=b_j$总是函数$f'(z)/f(z)$的一级极点，其留数等于$-\beta_j$．在圆$|z-b_j|<\delta$内，

$$\varphi(z)=\varphi(b_j)+(z-b_j)\varphi_2(z),$$

其中$\varphi_2(z)$在$|z-b_j|<\delta$内是解析的，所以在$0<|z-b_j|<\delta$内，

$$\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}=-\frac{\beta_j}{z-b_j}\varphi(b_j)+\mu(z),$$

其中$\mu(z)=-\beta_j\varphi_2(z)+\varphi(z)\dfrac{h'(z)}{h(z)}$在$|z-b_j|<\delta$内是解析的．于是

$$\mathrm{Res}(F,b_j)=-\beta_j\varphi(b_j). \tag{14}$$

将(13)，(14)式代入(12)式，立即得到(11)式．定理证毕．

在公式(11)中，若令$\varphi(z)=z$，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{zf'(z)}{f(z)}\,dz=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k a-\sum_{j=1}^{m}\beta_j b_j. \tag{15}$$

上式右边的第一个和数表示$f(z)$在γ内部的零点之和，第二个和数表示$f(z)$在γ内部的极点之和．

在(11)式中，若令$\varphi(z)\equiv1$，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}dz=N-P,$$

其中N是$f(z)$在γ内部的零点个数$\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k$，$P$是$f(z)$在$\gamma$内部的极点个数$\sum\limits_{j=1}^{m}\beta_j$，因此，我们有：

定理2 若函数$f(z)$在域D内亚纯，γ是D内的可求长简单闭

曲线，其内部属于D，$f(z)$在γ上没有零点和极点，则

$$N-P=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz, \tag{16}$$

其中N，P分别是$f(z)$在γ内部的零点个数与极点个数．

定理2称为**幅角原理**，其几何意义是：映照$w=f(z)$把γ映为w平面上可求长曲线Γ：$w=\Gamma(t)=f[\gamma(t)]$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$．由于$f(z)\neq0$，$z\in\gamma$，所以$\Gamma$不过原点(图5-1)．于是

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dw}{w}. \tag{17}$$

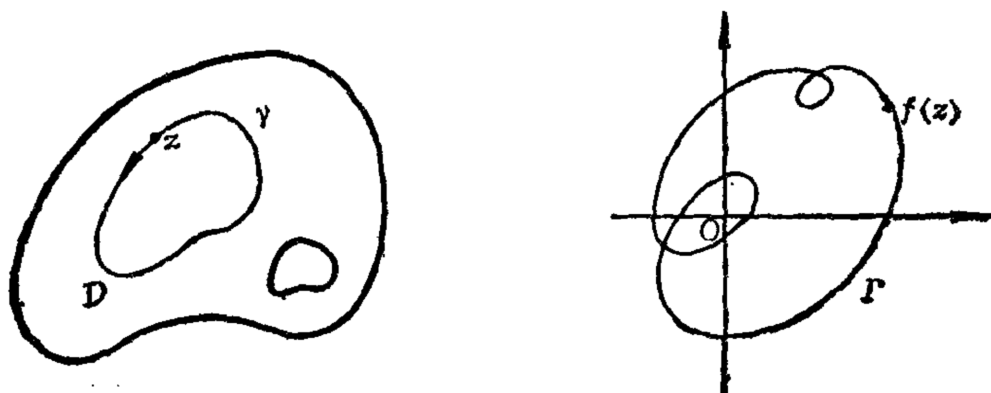


图 5-1

我们已知，当Γ是一条可求长简单闭曲线时，在Γ内部含有原点的情况下，(17)式右边的积分为1；在Γ内部不含有原点的情况下，积分为零．一般地，当Γ是任意不过原点的可求长闭曲线时，$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{dw}{w}$等于$\Gamma$绕原点的圈数（称为$\Gamma$关于原点的环绕次数）也就是当$w$沿$\Gamma$连续变化时，等于它的幅角的增量除以$2\pi$

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \mathrm{Arg}w=\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \mathrm{Arg}f(z).$$

因此

$$N-P=\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \mathrm{Arg}f(z). \tag{18}$$

幅角原理由此而得名.

特别地，若函数$f(z)$在D内解析，则$f(z)$在γ内部的零点个数

$$N=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz. \tag{19}$$

现在我们从幅角原理推出下述重要的 Rouché 定理.

定理 3（Rouché） 设γ是域D内的可求长简单闭曲线，其内部属于D.若函数$f(z)$，$g(z)$在域D内解析，在γ上满足条件

$$|f(z)-g(z)|<|f(z)|, \tag{20}$$

则$f(z)$和$g(z)$在γ内部有相同的零点个数.

证明 由(20)式，在γ上$|f(z)|>0$. 同样，$g(z)$在γ上也不为零. 因为，若不然，$g(z_0)=0$，$z_0\in\gamma$，则由(20)式$|f(z_0)|<|f(z_0)|$，这就矛盾了.

设$f(z),g(z)$在γ内部的零点个数分别为N_f,N_g，由幅角原理得到

$$N_f=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz,$$

$$N_g=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{g'(z)}{g(z)}dz,$$

所以

$$\begin{aligned}N_g-N_f&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\left(\frac{g'(z)}{g(z)}-\frac{f'(z)}{f(z)}\right)dz\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{fg'-f'g}{fg}\,dz\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{(g/f)'}{g/f}dz.\end{aligned}$$

若设 $F(z)=\frac{g(z)}{f(z)}$，则

$$N_g - N_f = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F'(z)}{F(z)}dz.$$

由(20)式，在γ上，

$$|F(z)-1|<1. \tag{21}$$

当 z 描画出γ时，$w=F(z)$描画出闭曲线Γ. 由(21)式，Γ位于圆$|w-1|<1$内(图5-2). 因此Γ关于原点的环绕次数为零，所以

$$N_g - N_f = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F'(z)}{F(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dw}{w} = 0,$$

$$N_f = N_g.$$

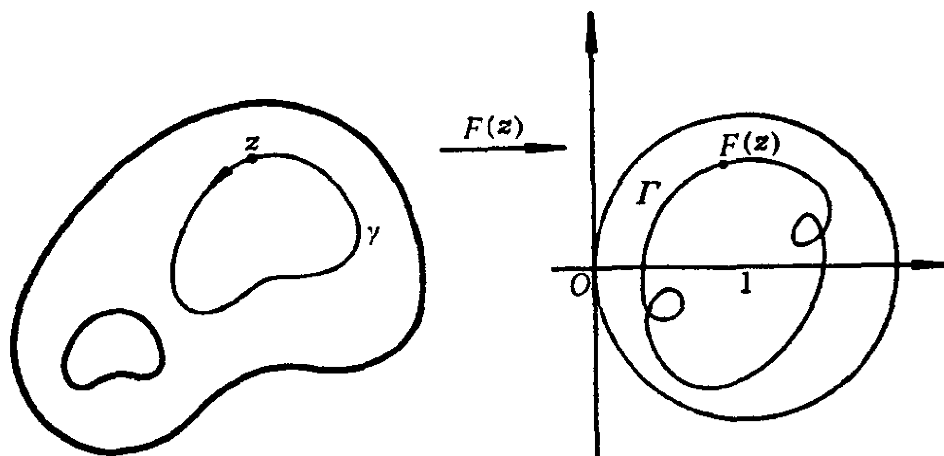


图 5-2

下面两个定理可以看作是Rouché定理的推论.

定理4 若函数$f(z)$在域D内解析，$w_0=f(z_0)$，$z_0\in D$是$f(z)-w_0$的m级零点，则对于充分小的$\rho>0$，存在$\delta>0$，使得对于圆$|w-w_0|<\delta$内的每一个A，函数$f(z)-A$在$|z-z_0|<\rho$内恰有m个零点.

证明 z_0是函数$f(z)-f(z_0)$的m级零点，由零点孤立性，存在$\rho>0$,使得在属于D的闭圆$|z-z_0|\leqslant\rho$上，$f(z)-f(z_0)$除去z_0外没有其他的零点，在$|z-z_0|=\rho$上

$$|f(z)-f(z_0)|\geqslant\delta\ (\delta>0).$$

于是对于$|w-w_0|<\delta$内的任意A，当$|z-z_0|=\rho$时，

$$|A-w_0|<|f(z)-f(z_0)|,$$

即

$$|f(z)-f(z_0)-(f(z)-A)|<|f(z)-f(z_0)|.$$

由Rouché定理，$f(z)-A$和$f(z)-f(z_0)$，在圆$|z-z_0|<\rho$内有相同个数的零点，$f(z)-f(z_0)$在$|z-z_0|<\rho$内恰有m个相重的零点，因此$f(z)-A$在$|z-z_0|<\rho$也有m个零点．定理证毕．

注意，如果我们取ρ充分小，使得在$|z-z_0|<\rho$内，除去点z_0外，$f'(z)\neq 0$,那么这时，$f(z)-A\ (A\neq w_0)$在$|z-z_0|<\rho$内的m个零点只能是简单零点，因为对于这些零点，$(f(z)-A)'=f'(z)\neq 0$.

定理5(Hurwitz)　若函数序列$f_n(z)(n=1,2,\cdots)$在域D内是解析的，并且在D内闭一致收敛到不恒为零的函数$f(z)$，γ是D内可求长简单闭曲线，其内部属于D，且不经过$f(z)$的零点，则存在正整数N，使得当$n\geqslant N$时，在γ内部$f_n(z)$和$f(z)$有相同个数的零点．

证明　首先，由Weierstrass定理知，$f(z)$在D内是解析的．因为$f(z)$在γ上不为零，所以

$$|f(z)|\geqslant\alpha>0,\quad z\in\gamma.$$

另一方面，$f_n(z)$在γ上一致收敛到$f(z)$，所以存在正整数N，使得当$n\geqslant N$时，在γ上

$$|f_n(z)-f(z)|<\alpha.$$

于是，当$n\geqslant N$时，在γ上

$$|f(z)-f_n(z)|<|f(z)|.$$

由Rouché定理，在γ内部，$f_n(z)\ (n\geqslant N)$和$f(z)$有相同的零点个数．定理证毕．

定理6　若函数序列$f_n(z)$在域D内单叶解析，并且在D内闭一致收敛到函数$f(z)$，$f(z)$不为常数，则$f(z)$在D内单叶解析．

证明 由Weierstrass定理，$f(z)$在D内解析.假如$f(z)$在D内不是单叶的，那么在D内存在两点z_1, z_2，$z_1 \neq z_2$，使得

$$f(z_1) = f(z_2).$$

考虑函数

$$F(z) = f(z) - f(z_1).$$

z_1, z_2是$F(z)$的零点，但$F(z)$不恒为零，所以在D内有两个小圆c_1, c_2分别以z_1, z_2为圆心，且一个在另一个的外部，$F(z)$在c_1, c_2内除去z_1, z_2外沒有其他零点.

另一方面，函数序列

$$F_n(z) = f_n(z) - f(z_1)$$

在D内闭一致收斂到$F(z)$. 由Hurwitz定理，有一正整数N，使得当$n \geqslant N$时，函数$F_n(z)$在c_1, c_2内都至少有一个零点，所以在D内有z_1', z_2' $(z_1' \neq z_2')$使得

$$f_n(z_1') = f_n(z_2') = f(z_1).$$

这与函数$f_n(z)$在D内单叶相矛盾. 定理证毕.

例1 应用Rouché定理证明代数基本定理：n次代数方程

$$p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0$$

恰有n个根.

证明 因为$\lim\limits_{z \to \infty} p(z) = \infty$，所以存在正数$R$，使得当$|z| \geqslant R$时，$|p(z)| > 1$，于是在$|z| \geqslant R$沒有$p(z)$的零点. 又由

$$\frac{p(z)}{a_0 z^n} = 1 + \frac{a_1}{a_0 z} + \frac{a_2}{a_0 z^2} + \cdots + \frac{a_n}{a_0 z^n}$$

可知，$\lim\limits_{z \to \infty} \frac{p(z)}{a_0 z^n} = 1$，所以存在充分大的正数，不妨设就是$R$，使得当$|z| = R$时，有

$$\left| \frac{p(z)}{a_0 z^n} - 1 \right| < 1,$$

即

$$|p(z)-a_0z^n|<|a_0z^n|, \qquad |z|=R.$$

由Rouché定理，$p(z)$和a_0z^n在圆$|z|<R$内有相同个数的零点. a_0z^n在$|z|<R$内有n个零点，所以$p(z)$在圆$|z|<R$内有n个零点.

例2 求方程$z^4-6z+3=0$在圆$|z|<1$内与圆环$1<|z|<2$内根的个数.

设 $\qquad f(z)=-6z, \qquad g(z)=z^4-6z+3.$

在圆周$|z|=1$上，

$$|z^4+3|<|-6z|,$$

即

$$|g(z)-f(z)|<|f(z)|.$$

由Rouché定理，$g(z)$，$f(z)$在圆$|z|<1$内有相同个数的零点. $f(z)=-6z$在圆$|z|<1$内只有一个零点，所以$g(z)=z^4-6z+3$在圆$|z|<1$内也只有一个零点.

又设$f_1(z)=z^4$，在圆周$|z|=2$上

$$|-6z+3|<|z^4|,$$

即

$$|g(z)-f_1(z)|<|f_1(z)|.$$

所以$g(z)$在圆$|z|<2$内有4个零点.又因为$|z|=1$上，$|g(z)-f(z)|<|f(z)|$，所以在圆周$|z|=1$上，$g(z)\neq 0$. 因此$g(z)$在圆环$1<|z|<2$内有三个零点.

例3 若函数$f(z)$在域D内是解析的，γ是D内的可求长简单闭曲线，其内部属于D，$f(z)$在γ上取实值，则$f(z)$在D内为常数.

事实上，设复数$a=\alpha+i\beta$，$\beta>0$，函数$f(z)-a$在D内是解析的，且当z在γ上时，

$$\mathrm{Im}(f(z)-a)=-\beta<0,$$

即$f(z)-a$位于下半平面上，所以

$$\Delta_\gamma \mathrm{Arg}(f(z)-a)=0.$$

由幅角原理，$f(z)-a$在γ内部没有零点，即$f(z)$在γ内部不取a值，同理$f(z)$在γ内部不取$a_1=\alpha_1+i\beta_1$，$\beta<0$.所以在γ内部，$\operatorname{Im} f(z)=0$. 根据Cauchy-Riemann方程，$f(z)$在D内为常数.

例4 证明方程$p(z)=z^4+2z^3-2z+10=0$在每个象限恰有一个根.

首先，方程$p(z)=0$没有实根. 事实上，在实轴上，$z=x$，$p(z)=p(x)=x^4+2x^3-2x+10=(x^2-1)(x+1)^2+11$. 当$|x|\geqslant 1$时，显然 $p(x)>0$；当$|x|\leqslant 1$ 时，$(x^2-1)(x+1)^2>-2$，所以$p(x)>9$. 于是在实轴上 $p(z)\neq 0$.

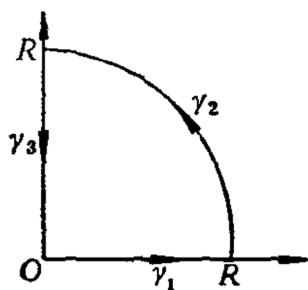


图 5-3

在虚轴上，$z=iy$，$p(iy)=y^4+10-2iy(y^2+1)\neq 0$,即在虚轴上,$p(z)$也没有零点.

考虑图5-3所示的路径γ. 它由 γ_1，γ_2，γ_3所组成. 在γ_1上，$p(z)$是取实值的，$\Delta_{\gamma_1}\operatorname{Arg} p(z)=0$. 在$\gamma_2$上，

$$p(z)=z^4\left(1+\frac{2z^3-2z+10}{z^4}\right),$$

$$\Delta_{\gamma_2}\operatorname{Arg} p(z)=4\cdot\frac{\pi}{2}+o(1)\quad(R\to+\infty),$$

$$\begin{aligned}\Delta_{\gamma_3}\operatorname{Arg} p(z)&=\operatorname{Arg} p(0)-\operatorname{Arg} p(iR)\\&=-\operatorname{Arg}[R^4+10-2iR(R^2+1)]\\&=-\operatorname{Arg}\left(1-2i\frac{R(R^2+1)}{R^4+10}\right)\\&=o(1)\quad(R\to+\infty),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\Delta_{\gamma}\operatorname{Arg} p(z)&=\Delta_{\gamma_1}\operatorname{Arg} p(z)+\Delta_{\gamma_2}\operatorname{Arg} p(z)+\Delta_{\gamma_3}\operatorname{Arg} p(z)\\&=2\pi+o(1)\quad(R\to+\infty).\end{aligned}$$

于是由幅角原理，$p(z)$在第一象限有一个零点．因为实系数多项式的零点是共轭出现的，所以 $p(z)$ 在第四象限也有一个零点．$p(z)$ 的另外两个零点必然互为共轭地出现在第二、第三象限．

习　题

1．求方程$z^7-5z^4+z^2-2=0$在圆$|z|<1$内的根的个数．

2．求方程$z^4-8z+10=0$在圆$|z|<1$与圆环$1<|z|<3$内的根的个数．

3．证明$z^4+7z+1=0$在圆环$3/2<|z|<2$内有三个根．

4．证明：若γ是一可求长简单闭曲线，在γ上

$$|a_kz^k|>|a_0+a_1z+\cdots+a_{k-1}z^{k-1}+a_{k+1}z^{k+1}+\cdots+a_nz^n|,$$

则当点$z=0$位于γ的内部时，多项式$p(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$在$\gamma$内部有$k$个零点；当点$z=0$不在$\gamma$内部时，$p(z)$在$\gamma$内部没有零点．

5．证明：若$a>e$，则方程$e^z=az^n$在圆$|z|<1$内有n个根．

6．证明：若$a>1$，则$ze^{a-z}=1$在圆$|z|<1$内恰有一个根，且是正实根．

7．若$f(z)$在圆$|z|<1$内是解析的，在圆$|z|\leqslant1$上连续，且$|f(z)|<1$，则$f(z)$在圆$|z|<1$内有唯一的不动点．

8．若$|a_k|<1$ $(k=1,2,\cdots,n)$，$|b|<1$，

$$f(z)=\prod_{k=1}^{n}\frac{z-a_k}{1-\bar{a}_kz},$$

则方程$f(z)=b$在圆$|z|<1$内恰有n个根；若$|b|>1$，则方程$f(z)=b$在圆$|z|>1$恰有n个根．

9．设函数$f(z)$在圆$|z|<R$内是解析的，在圆$|z|\leqslant R$上是连续的，$|f(0)|<m$，在圆周$|z|=R$上，$|f(z)|>m$，证明$f(z)$在圆$|z|<R$内至少有一个零点．

10．证明方程$(z+1)e^{-z}=z+2$在右半平面没有根．

11．证明：对于任意复数a，$1+z+az^n(n\geqslant2)$在圆$|z|\leqslant2$上

至少有一个零点.

12. 试利用Rouché定理证明最大模原理.

13. 证明：方程$z=\lambda-e^{-z}$（$\lambda>1$）在右半平面有唯一的一个根，且这个根是实的.

14. 证明：如果$\rho<1$，则对于充分大的n，多项式

$$p_n(z)=1+2z+3z^2+\cdots+nz^{n-1}$$

在圆$|z|<\rho$内没有零点.

15. 设函数$f(z)$在域D内是亚纯的，γ是D内的可求长简单闭曲线，其内部属于D，且在γ上没有$f(z)$的极点，证明：

(1) 若在γ上$|f(z)|<1$，则方程$f(z)=1$在γ内部的根数等于$f(z)$在γ内部的极点数.

(2) 若在γ上$|f(z)|>1$，则方程$f(z)=1$在γ内部的根数等于$f(z)$在γ内部的零点数.

16. 证明z^8+3z^3+7z+5在第一象限恰有两个零点.

17. 证明z^4+iz^3+1的四个零点都在圆$|z|<\frac{3}{2}$内，而第一象限内恰有一个零点.

18. 证明方程$p(z)=z^4+3z+3=0$在带域$0<\mathrm{Im}z<1$内恰有一个根.

§3 留数定理对积分计算的应用

这一节，我们讲述如何应用留数定理计算积分. 这里所指的积分主要是被积函数的原函数不能用初等函数表示出来的积分. 在这种情况下，数学分析中通常采用含参变量积分的方法. 一般说来，这种方法较为复杂. 用复变函数留数理论求这种积分，既简便又巧妙. 这种方法大致是这样：为了求实函数$f(x)$在实轴上或实轴上的某一线段I上的积分，我们在I上适当附加某一曲线使其构成一简单闭曲线γ，其内部为D，选取适当函数$F(z)$（通

常是将$f(x)$的自变量x扩充到复平面上)，然后在$\overline{D}$上对$F(z)$应用留数定理，这样就把实轴上$f(x)$的积分转化为计算$F(z)$在D内奇点的留数与那部分附加曲线上的积分了.

1. 两个引理

下述引理1在第三章§1中已作为习题.

引理1 1）若函数$f(z)$在域D：$0<|z-a|\leqslant r$，$\theta_1\leqslant\arg(z-a)\leqslant\theta_2$上连续（图5-4），且

$$\lim_{\substack{z\to a\\ z\in D}}(z-a)f(z)=A,$$

则

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{\gamma_\rho}f(z)dz=Ai(\theta_2-\theta_1),$$

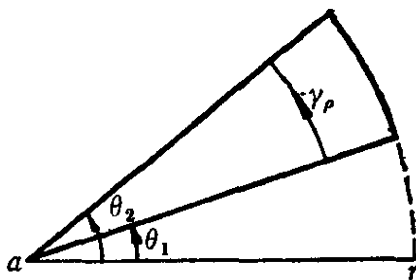


图 5-4

其中γ_ρ：$z=a+\rho e^{i\theta}$，$\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2$，$0<\rho<r$.

2）若函数$f(z)$在域D：$R\leqslant|z-a|<+\infty$，$\theta_1\leqslant\arg(z-a)\leqslant\theta_2$上连续，且

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in D}}(z-a)f(z)=A.$$

则

$$\lim_{\rho\to+\infty}\int_{\gamma_\rho}f(z)dz=Ai(\theta_2-\theta_1),$$

其中γ_ρ：$z=a+\rho e^{i\theta}$，$\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2$，$\rho>R$.

引理2（Jordan） 若函数$f(z)$在$R_0\leqslant|z|<+\infty$，$\operatorname{Im}z\geqslant0$上连续，且$\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ \operatorname{Im}z\geqslant0}}f(z)=0$，$a$是正的常数，则

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R}e^{iaz}f(z)dz=0,$$

其中γ_R: $z=Re^{i\theta}$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $R>R_0$. (图5-5).

证明 设$M(R)=\max\limits_{z\in\gamma_R}|f(z)|$,

$$\left|\int_{\gamma_R} e^{iaz}f(z)dz\right|\leqslant M(R)\int_0^\pi e^{-aR\sin\theta}Rd\theta$$

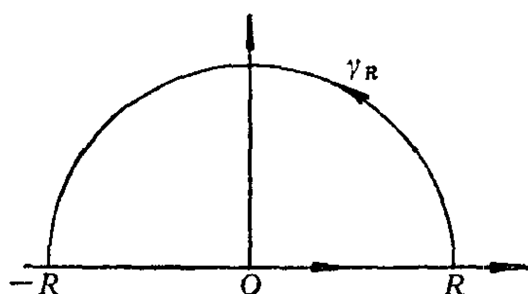


图 5-5

$$=2M(R)\int_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\theta}Rd\theta.$$

由于当$0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$时,

$$\sin\theta\geqslant\frac{2}{\pi}\theta,$$

所以

$$\left|\int_{\gamma_R} e^{iaz}f(z)dz\right|\leqslant 2M(R)R\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2aR}{\pi}\theta}d\theta$$

$$=\frac{\pi}{a}M(R)(1-e^{-aR}).$$

由条件, $\lim\limits_{R\to+\infty}M(R)=0$, 所以

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} e^{iaz}f(z)dz=0.$$

2. 积分的计算

(1) 积分$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$的计算

若函数$f(z)$在上半平面$\mathrm{Im}z>0$除去有穷多个孤立奇点a_1, $a_2,\cdots,a_n$外是解析的, 在$\mathrm{Im}z\geqslant0$上除去$a_1,a_2,\cdots$, a_n外连续, 且 $\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ \mathrm{Im}z\geqslant0}} zf(z)=0$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}(f, a_k). \qquad (22)$$

特别地，若$f(z)$是有理函数 $P_n(z)/Q_m(z)$，$Q_m(z)$ 在实轴上无零点，其次数比$P_n(z)$的次数至少大 2，$m \geqslant n+2$，则(22)式成立.

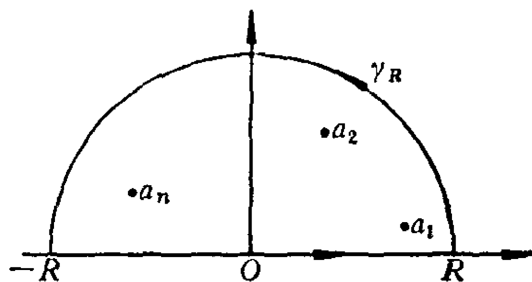


图 5-6

证明 取充分大的 R，使得上半圆：$|z|<R$，$\text{Im}z>0$ 包含 $f(z)$ 的孤立奇点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$(图5-6)．由留数定理得到

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}(f, a_k).$$

由引理 1，$\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$．因此在上式中，令$R\to+\infty$，立即得到(22)式.

例1 计算积分

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}，n\text{是正整数}.$$

设 $f(z)=1/(1+z^2)^{n+1}$，它在上半平面有唯一的孤立奇点 $z=i$，它是$f(z)$的$n+1$级极点，其留数为

$$\begin{aligned}
&\text{Res}(f, i)\\
&= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n}\left\{\frac{1}{(z+i)^{n+1}}\right\}\Bigg|_{z=i}\\
&= \frac{1}{n!} \frac{(-1)^n(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{(2i)^{2n+1}}\\
&= \frac{1}{i} \frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{2^{2n+1}n!}
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2i}\ \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}=\frac{1}{2i}\ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

由公式(22)，得到

$$I=2\pi i\ \mathrm{Res}(f,i)=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi.$$

注意，如果$f(x)$是x的偶函数，则

$$\int_0^{+\infty}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx.$$

如果$f(x)$不是偶函数，则用上面的方法无法计算$\int_0^{+\infty}f(x)dx$.

这时需要采用别的方法（见下面(5)中的(34)式和(36)式）.

(2) 积分$\int_0^{2\pi}R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta$的计算，其中$R(x,y)$是两个变量$x$与$y$的有理函数

这类积分可以化为第一种情况，

$$\int_0^{2\pi}R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta=\int_0^{\pi}+\int_{\pi}^{2\pi},$$

若在后一个积分中作变换$\varphi=\theta-2\pi$，则$\int_{\pi}^{2\pi}=\int_{-\pi}^{0}$.所以，

$$\int_0^{2\pi}R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta=\int_{\pi}^{\pi}R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta.$$

再作变换 $t=\tan\frac{\theta}{2}$，则

$$\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad d\theta=\frac{2dt}{1+t^2},$$

于是

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt. \qquad (23)$$

右端是有理函数的积分.

我们也可以采取另一种方法，即化为单位圆周上的复积分. 设$z = e^{i\theta}$,

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \qquad d\theta = \frac{1}{iz} dz.$$

于是

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta) d\theta$$

$$= \int_{|z|=1} R\left(\frac{z - 1/z}{zi}, \frac{z + 1/z}{2}\right) \frac{dz}{iz}.$$

设

$$F(z) = \frac{1}{iz} R\left\{\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right\},$$

$F(z)$是z的有理函数. 若$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是$F(z)$ 在圆 $|z|<1$ 内的极点，则

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta) d\theta = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(F, a_k). \qquad (24)$$

例 2 计算积分

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{a + b\cos\theta} d\theta, \ (a > b > 0).$$

$$I = \frac{1}{2b} \int_{|z|=1} F(z) dz,$$

$$F(z)=\frac{(z^2-1)^2}{z^2\left(z^2+\frac{2az}{b}+1\right)}$$

$$=\frac{(z^2-1)^2}{z^2(z-\alpha)(z-\beta)},$$

α,β是方程 $z^2+\frac{2az}{b}+1=0$的两个根，

$$\alpha=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b},\ \ \beta=\frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b},\ \alpha\beta=1.$$

$F(z)$在圆$|z|<1$内有两个孤立奇点．$z=0$，$z=\alpha$分别是$F(z)$的二级极点和一级极点．在§1例 2 中，我们已经求出$F(z)$ 在点 $z=0$和$z=\alpha$的留数为

$$\mathrm{Res}(F,\alpha)=\alpha-\beta,\qquad \mathrm{Res}(F,0)=\alpha+\beta.$$

由(24)式，得到

$$I=2\pi i\cdot\frac{i}{2b}\{\mathrm{Res}(F,0)+\mathrm{Res}(F,\alpha)\}$$

$$=2\pi i\cdot\frac{i}{2b}\cdot 2\alpha=\frac{2\pi}{b^2}(a-\sqrt{a^2-b^2}).$$

(3) 积分$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin x dx$和$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos x dx$的计算

若函数$f(z)$在上半平面$\mathrm{Im}\,z>0$除去点$a_1,a_2,\cdots,a_n$外是解析的，在$\mathrm{Im}\,z\geq 0$上除去$a_1,a_2,\cdots,a_n$外连续，且 $\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ \mathrm{Im}\,z\geq 0}}f(z)=0$，

则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{iax}f(x)dx$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(e^{iaz}f(z), a_k). \tag{25}$$

如果$f(z)$在实轴上取实值，分出实部和虚部得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ax dx$$

$$= -2\pi \mathrm{Im}\left\{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(e^{iaz}f(z), a_k)\right\}. \tag{26}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin ax dx$$

$$= 2\pi \mathrm{Re}\left\{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(e^{iaz}f(z), a_k)\right\}, \tag{27}$$

其中$a>0$.特别地，若$f(z)$是实系数的有理函数 $P_n(z)/Q_m(z)$，$Q_m(z)$在实轴上沒有零点，且$Q_m(z)$的次数至少比 $P_n(z)$ 的次数大1，$m\geqslant n+1$，则(25),(26),(27)式成立.

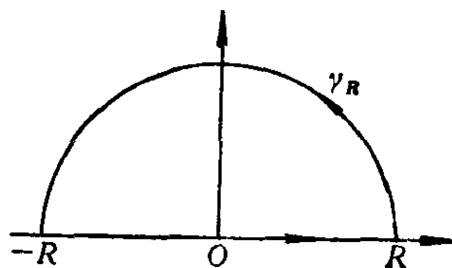


图 5-7

证明 取图5-7 所示的积分路径，当R充分大时，这条路径的内部包含$a_1, a_2, \cdots, a_n$. 由留数定理得到

$$\int_{-R}^{R} e^{iax}f(x)dx + \int_{\gamma_R} e^{iaz}f(z)dz$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(e^{iaz}f(z), a_k).$$

令$R\to+\infty$，由Jordan引理，

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} e^{iaz}f(z)dz = 0.$$

因此立即得到(25)式.

例 3 计算积分(Laplace)

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^2}dx\quad(a>0).$$

设$f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$，$F(z)=e^{iaz}f(z)$. $f(z)$在上半平面有唯一的孤立奇点（一级极点）$z=i$，留数

$$\mathrm{Res}(F,i)=\frac{1}{z+i}\quad e^{iaz}\Big|_{z=i}=\frac{1}{2i}e^{-a}.$$

由(25)式，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^2}dx=2\pi i\cdot\frac{1}{2i}e^{-a}=\pi e^{-a}.$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos ax}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-a}.$$

例 4 计算积分(Dirichlet)

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx.$$

由于被积函数是偶函数，故

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx.$$

设

$f(z)=1/z$，$F(z)=e^{iz}/z$. 因为点 $z=0$是 $f(z)$ 的一级极点，所以不能直接应用(25)式. 我们考虑图 5-8 所示的路径.

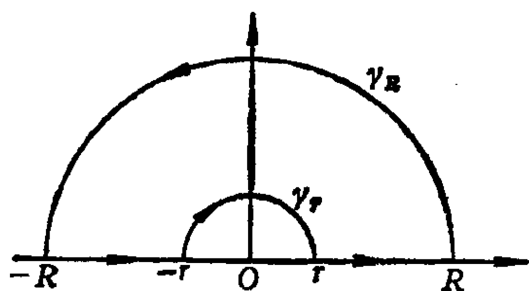


图 5-8

由Cauchy定理，得到

$$\int_{r}^{R} F(x)dx + \int_{-R}^{-r} F(x)dx + \int_{\gamma_R} F(z)dz + \int_{\gamma_r} F(z)dz = 0.$$

由Jordan引理，

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} F(z)dz = 0.$$

在γ_r上的积分，根据$\lim\limits_{z\to 0} zF(z) = 1$及引理1中的1)，有

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} F(z)dz = -\pi i.$$

又因为

$$\int_{-R}^{-r} F(x)dx = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x}dx = -\int_{r}^{R} \frac{e^{-ix}}{x}dx,$$

所以

$$\int_{r}^{R} \frac{e^{ix} - e^{ix}}{x}dx + \int_{\gamma_R} F(z)dz + \int_{\gamma_r} F(z)dz = 0.$$

令$r\to 0, R\to +\infty$，得到

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

注意：如果$f(x)$是偶函数，那么

$$\int_{0}^{+\infty} f(x)\cos ax dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ax dx.$$

但是，如果$f(x)$不是偶函数，我们就不能用这个方法求出积分$\int_{0}^{+\infty} f(x)\cos ax dx$.对于积分$\int_{0}^{+\infty} f(x)\sin ax dx$，情况是类似的.

(4) 积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ 及与此有关的积分

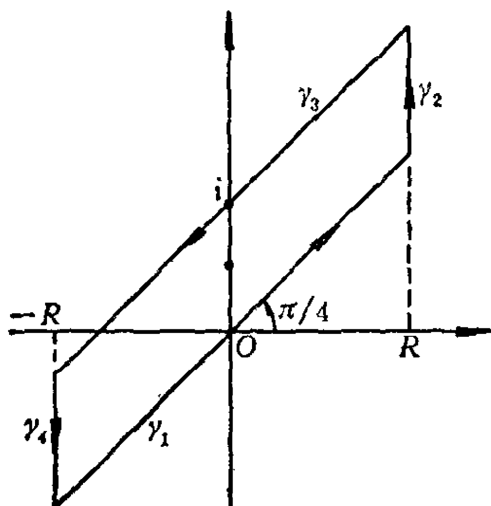


图 5-9

设

$$f(x)=\frac{e^{\pi iz^2+2\pi z}}{e^{2\pi z}+1},$$

并考虑图 5-9 所示的路径 γ，它是由 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 四个线段所组成，$f(x)$ 在 γ 的内部有唯一的奇点 $z=i/2$（一级极点），其留数为

$$\mathrm{Res}\left(f(z),\frac{i}{2}\right)$$

$$=\left.\frac{e^{\pi iz^2+2\pi z}}{2\pi e^{2\pi z}}\right|_{z=\frac{i}{2}}$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{\pi i}{4}}.$$

由留数定理，有

$$\left(\int_{\gamma_1}+\int_{\gamma_2}+\int_{\gamma_3}+\int_{\gamma_4}\right)f(z)dz=ie^{-\frac{\pi i}{4}}.$$

在 γ_2 上，$z=R+iy$，$R\leqslant y\leqslant R+1$，$z^2=R^2-y^2+2iRy$，因而 $\mathrm{Re}(z^2)=R^2-y^2$，

$$|e^{2\pi z}+1|\geqslant|e^{2\pi z}|-1=e^{2\pi R}-1\geqslant\frac{1}{2}e^{2\pi R}$$

（R适当大），

$$|e^{\pi iz^2+2\pi z}|=e^{-2\pi Ry+2\pi R}\leqslant e^{2\pi R-2\pi R^2}.$$

所以在 γ_2 上，有

$$|f(z)|\leqslant 2e^{-2\pi R^2},$$

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)dz\right| \leqslant 2e^{-2\pi R^2} \to 0 \quad (R \to +\infty).$$

同样，在γ_4上，$z = -R + iy$，$-R \leqslant y \leqslant -R + 1$.

$$|e^{2\pi z} + 1| > 1 - e^{-2\pi R} > \frac{1}{2} \ (R\text{适当大}),$$

$$|e^{\pi i z^2 + 2\pi z}| = e^{2\pi R y - 2\pi R} \leqslant e^{-2\pi R^2},$$

所以在γ_4上，有

$$|f(z)| \leqslant 2e^{-2\pi R^2},$$

$$\left|\int_{\gamma_4} f(z)dz\right| \leqslant 2e^{-2\pi R^2} \to 0 \ (R \to +\infty).$$

因此，若令 $R \to +\infty$，就得到

$$\int_L f(z)dz - \int_{L_1} f(\zeta)d\zeta$$

$$= ie^{-\frac{\pi i}{4}},$$

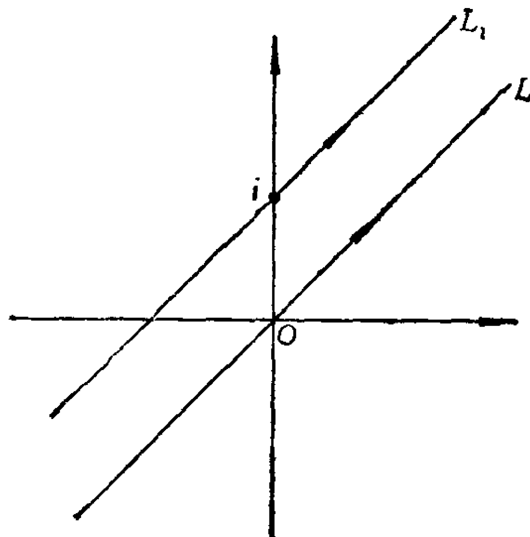


图 5-10

其中L, L_1是图 5-10 所示的两条平行直线，它们和正实轴的夹角为$\frac{\pi}{4}$.

令$\zeta = z + i$，若点ζ在L_1上，则点z在L上，所以上式为

$$\int_L [f(z) - f(z+i)]dz = ie^{-\frac{\pi i}{4}}.$$

但是

$$f(z) - f(z+i)$$

$$=\frac{e^{\pi i z^2+2\pi z}-e^{\pi i(z+i)^2+2\pi(z+i)}}{e^{2\pi z}+1}=e^{\pi i z^2}.$$

所以

$$\int_L e^{\pi i z^2}dz=ie^{-\frac{\pi i}{4}}.$$

在L上，$z=re^{i\frac{\pi}{4}}$，$-\infty<r<+\infty$．$z^2=r^2e^{\frac{\pi}{2}i}=r^2i$，因此得到

$$\int_L e^{\pi i z^2}dz=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\pi r^2}e^{\frac{\pi i}{4}}dr=ie^{-\frac{\pi i}{4}},$$

即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\pi r^2}dr=ie^{-\frac{\pi i}{2}}=1.$$

最后令$x=\sqrt{\pi}\,r$得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi},$$

或

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

例 5 计算积分(Fresnel)

$$\int_0^\infty \cos x^2dx \text{ 及} \int_0^\infty \sin x^2dx.$$

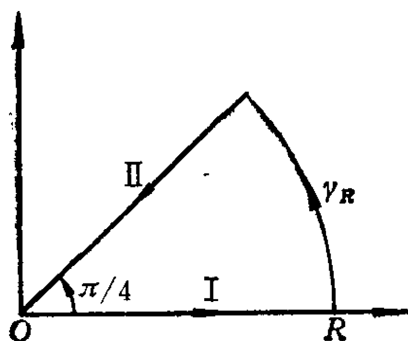


图 5-11

设$f(z)=e^{iz^2}$，并考虑图5-11所示的路径．由Cauchy定理，

$$\int_{\mathrm{I}}f(z)dz+\int_{\mathrm{II}}f(z)dz+\int_{\gamma_R}f(z)dz=0.$$

在γ_R上，$z=Re^{i\theta}$，$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$，$z^2=R^2e^{2i\theta}$，

$$|f(z)|=e^{-R^2\sin 2\theta}\leqslant e^{-\frac{4R^2}{\pi}\theta}；$$

因此得到

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right|$$

$$\leqslant\int_0^{\pi/4} e^{-\frac{4R^2}{\pi}\theta} Rd\theta$$

$$=\frac{\pi}{4R}(1-e^{-R^2})\to 0 \quad (R\to+\infty).$$

所以

$$\lim_{R\to+\infty}\left(\int_{\mathrm{I}} f(z)\,dz+\int_{\mathrm{II}} f(z)dz\right)=0.$$

在Ⅰ上，$z=x$，在Ⅱ上，$z=xe^{\pi i/4}$，$0\leqslant x\leqslant R$. 所以上式可写成

$$\int_0^{+\infty} e^{ix^2}dx-\int_0^{+\infty} e^{i(xe^{\pi i/4})^2}e^{\pi i/4}dx=0,$$

由例4得到

$$\int_0^{+\infty} e^{ix^2}dx=e^{\pi i/4}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\pi i/4}.$$

最后得到

$$\int_0^{+\infty}\cos x^2dx=\int_0^{+\infty}\sin x^2dx=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

例6 计算积分(Poisson)

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2x\ dx.$$

设 $f(z)=e^{-z^2}$，并考虑图5-12所示的路径．$f(z)$在C上解析．由Cauchy定理得到

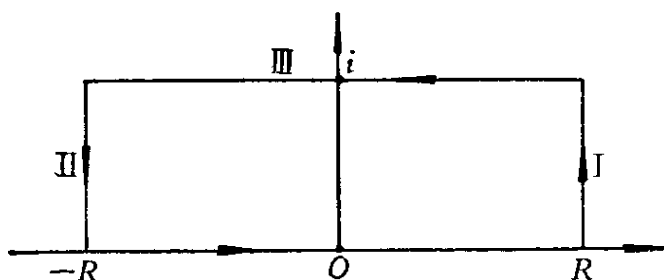


图 5-12

$$\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx+\int_{\mathrm{I}} f(z)\,dz+\int_{\mathrm{I}} f(z)dz+\int_{\mathrm{III}} f(z)dz=0.$$

在Ⅰ上，$z=R+iy$，$0\leqslant y\leqslant 1$，$z^2=R^2-y^2+2iRy$，$\mathrm{Re}(z^2)=R^2-y^2$.

$$|f(z)|=e^{-R^2+y^2}\leqslant e^{-R^2+1},$$

由此得到

$$\left|\int_{\mathrm{I}} f(z)\,dz\right|\leqslant e^{-R^2+1}\to 0\quad (R\to+\infty).$$

同理

$$\int_{\mathrm{II}} f(z)dz\to 0\quad (R\to+\infty).$$

在Ⅲ上，$z=x+i$，$-R\leqslant x\leqslant +R$，

$$f(z)=e^{-(x+i)^2}=e\cdot e^{-x^2}\cdot e^{-2ix}.$$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx+e\int_{+\infty}^{-\infty} e^{-x^2}e^{2ix}dx=0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}e^{2ix}\,dx=e^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}\,e^{-1},$$

故

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2x dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-1}.$$

一般地，有

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos 2bx dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-b^2/a} \quad (a>0).$$

(5) ***多值函数的积分***

这一段我们讲述被积函数扩充到复平面时是多值函数的情形.

1° 积分$\int_0^{+\infty} f(x)x^{p-1}dx \quad (0<p<1)$的计算

若函数$f(z)$在$\mathbb{C}_\infty$上除去点$a_1,a_2,\cdots,a_n$外是解析的，$a_1,a_2,\cdots,a_n$不在包括原点的正实轴上，$z=\infty$是$f(z)$的零点（其级$m\geqslant1$），则

$$\int_0^{+\infty} f(x)x^{p-1}dx$$

$$=\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi p i}}\sum_{k=1}^{n}\text{Res}(z^{p-1}f(z),a_k), \qquad (28)$$

其中$z^{p-1}=e^{(p-1)\log z}$，$0<\text{Im}\log z=\arg z<2\pi$. 特别地，若$f(z)$是有理函数$P_n(z)/Q_m(z)$，$Q_m(z)$在包括原点的正实轴上没有零点，其次数比$P_n(z)$的次数至少大1，$m\geqslant n+1$，则(28)式成立.

证明 设

$$F(z)=z^{p-1}f(z)=e^{(p-1)\log z}f(z),$$

其中 $\log z=\log|z|+i\arg z,\ 0<\arg z<2\pi.$

取路径γ：从正实轴上的点$z=r$，沿中心在原点的圆周γ_r（顺时针方向）回到$z=r$，再沿正实轴到点$z=R$，从点$z=R$沿中心在原点的圆周γ_R（反时针方向）回到点$z=R$，最后，沿

正实轴到点 $z=r$(图5-13)．这一路径虽然不是简单闭曲线，但是由于$f(z)$的孤立奇点是有穷多个，所以我们一定可以用一条不通过$f(z)$的奇点的半径连接γ_R和γ_r，把这个路径变为两个简单闭曲线，在它们所围成的两个域内，对于$f(z)$应用留数定理．而在连接γ_R和γ_r的半径上，来回积分两次，其和为零．因此在γ所围成的域内可应用留数定理．今后，我们遇到这种情形，总是采用上述类似的步骤，而不再予以说明了．在实轴上从点$z=r$到点$z=R$来回两次看作是上边沿Ⅰ和下边沿Ⅱ（图5-13)．当R充分大时，γ"内部"包含$f(z)$的所有孤立奇点a_1，$a_2,\cdots,a_n$．函数$f(z)$连续到边界（从上半平面连续到上边沿Ⅰ，从下半平面连续到下边沿Ⅱ)．由留数定理得到

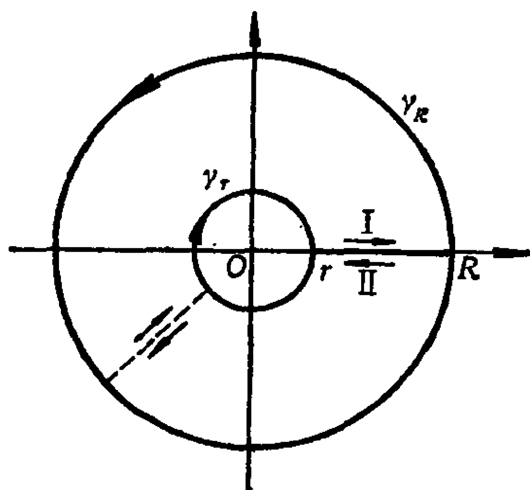


图 5-13

$$\int_r^R e^{(p-1)\log x} f(x)dx+\int_{\gamma_R}F(z)dz$$

$$+\int_R^r e^{(p-1)(\log x+2\pi i)} f(x)dx+\int_{\gamma_r}F(z)dz$$

$$=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(F(z),a_k), \tag{29}$$

即

$$(1-e^{2\pi p i})\int_r^R x^{p-1}f(x)dx+\int_{\gamma_r}F(z)dz+\int_{\gamma_R}F(z)dz$$

$$=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(F,a_k).$$

又有

$$\left|\int_{\gamma_r} F(z)dz\right| = \left|\int_{\gamma_r} e^{(p-1)(\log r + i\arg z)} f(z)dz\right|$$

$$\leqslant r^{p-1}\max_{z\in\gamma_r}|f(z)|\cdot 2\pi r$$

$$= 2\pi r^p \max_{z\in\gamma_r}|f(z)| \to 0\quad (r\to 0).$$

同理有

$$\left|\int_{\gamma_R} F(z)dz\right| \leqslant 2\pi R^p \max_{z\in\gamma_R}|f(z)|.$$

由于$f(z)$在$z=\infty$有m级零点，在γ_R上，$|f(z)|<M/R^m$，M是常数，$m\geqslant 1$，所以

$$\left|\int_{\gamma_R} F(z)dz\right| \leqslant \frac{2\pi M}{R^{m-p}} \to 0\quad (R\to +\infty).$$

在(29)式中令$r\to +0$，$R\to +\infty$，得到

$$(1-e^{2p\pi i})\int_0^{+\infty} x^{p-1}f(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(F, a_k).$$

即

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1}f(x)dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi p i}}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(z^{p-1}f(z), a_k),$$

或

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1}f(x)dx = -\frac{\pi}{e^{p\pi i}\sin p\pi}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(z^{p-1}f(z), a_k). \quad (30)$$

注意，关于p，只要假定$0<p<m$，且不为整数，则(28)式成立．如果$f(x)$是偶函数，仍可采用(3)中的积分路径．

例7 计算积分

$$I = \int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{(1+x)^m}dx,$$

其中m是正整数，p不是整数，$0<p<m$.

$$f(z)=\frac{1}{(1+z)^m},\qquad F(z)=z^{p-1}f(z).$$

$z=-1$是$f(z)$的m级极点．$z=\infty$是$f(z)$的m级零点．$F(z)$在点$z=-1$的留数

$$\operatorname{Res}(F(z),-1)=\frac{1}{(m-1)!}(z^{p-1})^{(m-1)}\Big|_{z=-1}$$

$$=\frac{1}{(m-1)!}(p-1)(p-2)\cdots(p-m+1)z^{p-m}\Big|_{z=-1}$$

$$=\frac{1}{(m-1)!}(p-1)\ (p-2)\cdots(p-m+1)\ (-1)^{p-m}$$

$$=\frac{1}{(m-1)!}(p-1)\ (p-2)\cdots(p-m+1)e^{(p-m)\pi i}$$

$$=-\frac{1}{(m-1)!}(1-p)\ (2-p)\cdots(m-1-p)e^{p\pi i}.$$

由(28)式，得到

$$I=\frac{\pi}{\sin p\pi}\cdot\frac{1}{(m-1)!}(1-p)\ (2-p)\cdots(m-1-p)$$

$$=\frac{\pi}{\sin p\pi}\cdot\frac{1}{(m-1)!}\cdot\frac{\Gamma(m-p)}{\Gamma(1-p)}$$

$$=\frac{\pi}{\sin p\pi}\cdot\frac{\Gamma(m-p)}{\Gamma(m)\Gamma(1-p)}.$$

由余元公式 $\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\dfrac{\pi}{\sin p\pi}$，所以

$$I=\frac{\Gamma(p)\Gamma(m-p)}{\Gamma(m)}=B(p,m-p).$$

2° 积分$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{-a}f(x)dx$ $(0<a<1)$的计算

设函数$f(z)$在C_∞上除去点$a_1,a_2,\cdots,a_n$外是解析的($z=\infty$是$f(z)$的可去奇点)，且$a_1,a_2,\cdots,a_n$不在线段[0,1]上．在第二章我们已经知道$z^{a-1}(1-z)^{-a}$在C上去掉[0,1]后的域内是可以分出单值解析分支的(第二章§3习题10)

设 $F(z)=z^{a-1}(1-z)^{-a}f(z)$．并取图 5-14所示的路径 γ，当R充分大时，γ的"内部"包含$a_1,a_2,\cdots,a_n$．选定$F(z)$的一个分支为：在上边沿Ⅰ上，$\arg z=\arg(1-z)=0$．$F(z)$在γ"内部"除去点$a_1,a_2,\cdots,a_n$外是解析的，并从上半平面连续到Ⅰ上，从下半平面连续到Ⅱ上．由留数定理得到

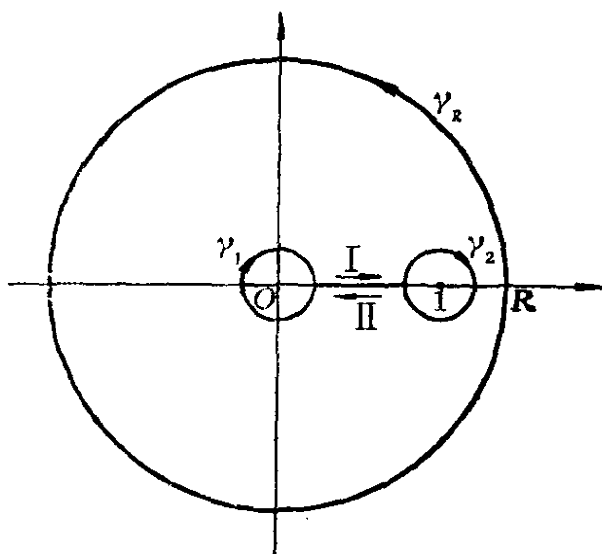


图 5-14

$$\int_{\text{I}} F(z)dz+\int_{\gamma_2} F(z)dz+\int_{\text{II}} F(z)dz$$
$$+\int_{\gamma_1} F(z)dz+\int_{\gamma_R} f(z)dz$$
$$=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\text{Res}(F(z),a_k). \tag{31}$$

在Ⅰ上，$z=x$，$F(z)=x^{a-1}(1-x)^{-a}f(x)$．在Ⅱ上，当$z$从Ⅰ经$\gamma_2$到Ⅱ上时$\arg z$的增量为零，$\arg(1-z)$的增量为$-2\pi$．因此按照我们选定的分支，在Ⅱ上，$\arg z=0,\arg(1-z)=-2\pi$．即$z=x$，$1-z=(1-x)e^{-2\pi i}$．所以在Ⅱ上，

$$F(z)=x^{a-1}(1-x)^{-a}e^{2\pi ia}f(x).$$

$$\int_{\text{II}} F(z)dz=\int_{1-r}^{r} x^{a-1}(1-x)^{-a}e^{2\pi i a}f(x)dx.$$

在γ_1上，$|z|=r$，$|z^{a-1}|=r^{a-1}$，而$(1-z)^{-a}$与$f(z)$是有界的，$|f(z)(1-z)^{-a}|\leqslant M$，于是

$$\left|\int_{\gamma_1} F(z)dz\right|\leqslant Mr^a\to 0 \quad (r\to 0).$$

在γ_2上，$|1-z|=r$，$|(1-z)^{-a}|=r^{-a}$，z^{a-1}与$f(z)$是有界的，$|f(z)z^{a-1}|\leqslant M_1$，所以

$$\left|\int_{\gamma_2} F(z)dz\right|\leqslant M_1 r^{1-a}\to 0 \quad (r\to 0).$$

在γ_R上，由于$f(z)$在$z=\infty$解析，所以$\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=C_0$.而函数$z^a(1-z)^{-a}$在$z=\infty$也是解析的，并且当$z\to\infty$时，它的模趋于1，它的幅角趋于$a\pi$．事实上，当$z$沿正实轴趋于$\infty$时$\arg z=0$，$\arg(1-z)=-\pi$，因此$z^a(1-z)^{-a}$的幅角等于$a\pi$（当$z$沿负实轴趋于$\infty$时，$\arg z=\pi$，$\arg(1-z)=0$），所以

$$\lim_{z\to\infty} z^a(1-z)^{-a}=e^{a\pi i},$$

$$\lim_{z\to\infty} zF(z)=C_0e^{a\pi i}.$$

由引理1，

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} F(z)dz=C_0e^{a\pi i}\cdot 2\pi i.$$

在(31)式中令$r\to+0$，$R\to+\infty$，得到

$$(1-e^{2a\pi i})\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{-a}f(x)dx+2\pi iC_0e^{a\pi i}$$

$$=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\text{Res}(F(z),a_k).$$

即

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{-a}f(x)dx$$

$$= \frac{C_0 \pi}{\sin \pi \alpha} - \frac{\pi}{e^{\alpha \pi i} \sin \pi \alpha} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(F(z), a_k), \qquad (32)$$

其中$C_0 = f(\infty), F(z) = z^{\alpha-1}(1-z)^{-\alpha} f(z)$. 特别地，如果$f(z)$是有理函数$P_n(z)/Q_m(z)$，$m \geqslant n$，且当$0 \leqslant x \leqslant 1$时$Q_m(x)$不为零，则(32)式亦成立.

例 8 计算积分

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} \cdot \frac{1}{1+x} dx.$$

在这里$\alpha = 1/3$，$f(z) = 1/(1+z)$，$f(\infty) = 0$，$F(z) = z^{-2/3}(1-z)^{-1/3} f(z)$.

$$\operatorname{Res}(F(z), -1) = z^{-2/3}(1-z)^{-1/3} \big|_{z=-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} e^{-2\pi i/3}$$

(在点$z = -1$处，$\arg z = \pi$，$\arg(1-z) = 0$). 所以由(32)式得到

$$I = -\frac{\pi}{e^{\frac{1}{3}\pi i} \sin \frac{1}{3}\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2}} e^{-\frac{2\pi}{3} i} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}} \pi.$$

3° 积分$\int_0^{+\infty} f(x) \log x \, dx$的计算

若函数$f(z)$在$\mathbf{C}_\infty$上只有有穷个孤立奇点$a_1, a_2, \cdots, a_n$，且这些孤立奇点不在包括原点的正实轴上，$f(z)$在实轴上取实値，此外$z = \infty$是$f(z)$的m级零点，$m \geqslant 2$，则

$$\int_0^{+\infty} f(x) \log x dx = -\frac{1}{2} \operatorname{Res}\left\{ \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f(z) \log^2 z, a_k) \right\}, \quad (33)$$

其中$\log z$是对数主値，$0 < \operatorname{Im} \log z < 2\pi$. 特别地，若$f(z)$是实系数的有理函数$P_n(z)/Q_m(z)$，$Q_m(z)$的零点不在包括原点的正

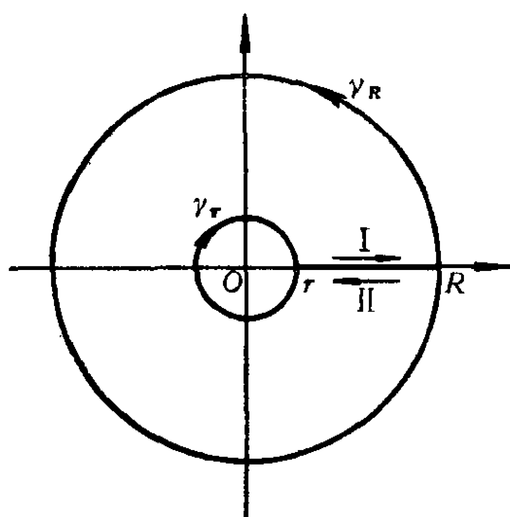


图 5-15

实轴上，且 $Q_m(z)$的次数至少比$P_n(z)$的次数大 2，$m\geqslant n+2$，则(33)式成立.

证明 考虑图5-15所示的路径γ，并设

$$F(z)=f(z)\log^2 z,$$

其中 $\log z$ 是对数主值，而$0<\operatorname{Im}\log z<2\pi$. $F(z)$在γ的“内部”解析，且连续到边界γ（在Ⅰ，Ⅱ上，分别是从上半平面和下半平面连续到Ⅰ，Ⅱ），由留数定理，得到

$$\int_{\mathrm{I}}F(z)dz+\int_{\gamma_R}F(z)dz+\int_{\gamma_r}F(z)dz+\int_{\mathrm{II}}F(z)dz$$

$$=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(F,a_k).$$

在Ⅰ上，$z=x$，$F(z)=f(x)\log^2 x$，因此

$$\int_{\mathrm{I}}F(z)dz=\int_r^R f(x)\log^2 x dx.$$

在Ⅱ上，$z=xe^{2\pi i}$，$F(x)=f(x)(\log x+2\pi i)^2$，所以

$$\int_{\mathrm{II}}F(z)dz=-\int_r^R f(x)(\log x+2\pi i)^2dx.$$

在γ_R上，$z=Re^{i\theta}$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，

$$|\log z|^2=\log^2 R+\theta^2\leqslant 2\log^2 R\ (R\text{适当大}).$$

$f(z)$在$z=\infty$有m级零点，所以当R充分大时，$|f(z)|\leqslant M/R^m$，M是正常数．于是

$$\left|\int_{\gamma_R}F(z)dz\right|\leqslant\frac{M}{R^m}\cdot 2\log^2 R\cdot 2\pi R$$

$$=\frac{4M\log^2 R}{R^{m-1}}\to 0\ (R\to+\infty).$$

在γ_r上，$z=re^{i\theta}$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，

$$|\log z|^2=\log^2 r+\theta^2\leqslant 2\log^2\frac{1}{r}\quad(r\text{充分小}).$$

$f(z)$在点$z=0$的邻域内有界，所以

$$|F(z)|\leqslant 2M_1\log^2\frac{1}{r},$$

$$\left|\int_{\gamma_r}F(z)dz\right|\leqslant 4\pi M_1 r\log^2\frac{1}{r}\to 0\quad(r\to+0).$$

于是

$$\int_0^{+\infty}f(x)\log^2 x dx-\int_0^{+\infty}f(x)(\log x+2\pi i)^2 dx$$

$$=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\text{Res}(F,a_k),$$

$$-4\pi i\int_0^{+\infty}f(x)\log x dx+4\pi^2\int_0^{+\infty}f(x)dx$$

$$=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\text{Res}(F,a_k),$$

在上式的两边取虚部，便得到(33)式；若两边取实部，得到

$$\int_0^{+\infty}f(x)dx=-\frac{1}{2\pi}\text{Im}\left\{\sum_{k=1}^{n}\text{Res}(f(z)\log^2 z,a_k)\right\}. \tag{34}$$

若$f(x)$是x的偶函数，$f(z)$在上半平面$\text{Im}z>0$除去点a_1，$a_2,\cdots,a_n$外是解析的，在$\text{Im}z\geqslant 0$上除去$a_1,a_2,\cdots,a_n$外是连续的，并且当z的模充分大时，$|f(z)|\leqslant M/|z|^m$，$m\geqslant 2$，M是常数，那么令$F(z)=f(z)\log z$，并取例 4 中的积分路径，可以证明

$$\int_0^{+\infty}f(x)\log x\, dx$$

$$= -\pi \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f(z)\log z, a_k), \qquad (35)$$

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx$$

$$= 2\operatorname{Re}\left\{ \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f(z)\log z, a_k) \right\}. \qquad (36)$$

例 9 计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x^2)^2} dx$.

设 $F(x) = \frac{\log^2 z}{(1+z^2)^2}$. 点 $z = \pm i$ 是 $F(z)$ 的 2 级极点，其留数为

$$\operatorname{Res}(F, i) = \frac{d}{dz}\left\{ \frac{\log^2 z}{(z+i)^2} \right\}\Bigg|_{z=i}$$

$$= 2\left\{ \frac{\log z}{z(z+i)^2} - \frac{\log^2 z}{(z+i)^3} \right\}\Bigg|_{z=i}$$

$$= 2\left\{ \frac{\frac{\pi i}{2}}{i(2i)^2} - \frac{\left(\frac{\pi i}{2}\right)^2}{(2i)^3} \right\} = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi^2}{16} i,$$

$$\operatorname{Res}(F, -i) = 2\left\{ \frac{\log z}{z(z-i)^2} - \frac{\log^2 z}{(z-i)^3} \right\}$$

$$= 2\left\{ \frac{\frac{3\pi i}{2}}{-i(-2i)^2} - \frac{\left(\frac{3\pi i}{2}\right)^2}{(-2i)^3} \right\}$$

$$= \frac{3\pi}{4} - \frac{9\pi^2}{16} i.$$

$$\operatorname{Res}(F, i) + \operatorname{Res}(F, -i) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{2} i.$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{\log x}{(1+x^2)^2}\,dx=-\frac{\pi}{4}.$$

考虑到$\frac{1}{(1+x^2)^2}$是偶函数，我们也可用(35)式计算这个积分.

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\log z}{(1+z^2)^2},i\right)=\frac{d}{dz}\left(\frac{\log z}{(z+i)^2}\right)\Bigg|_{z=i}$$

$$=\left\{\frac{1}{z(z+i)^2}-\frac{2\log z}{(z+i)^3}\right\}\Bigg|_{z=i}$$

$$=\frac{\pi}{8}+\frac{i}{4},$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\log x}{(1+x^2)^2}dx=-\pi\operatorname{Im}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{i}{4}\right)=-\frac{\pi}{4}.$$

例10 计算积分$\int_0^{+\infty}\frac{x}{e^x-1}dx$.

设 $f(z)=\frac{z^2}{e^z-1}$，并考虑图5-16所示的积分路径. 由 Cauchy 定理,

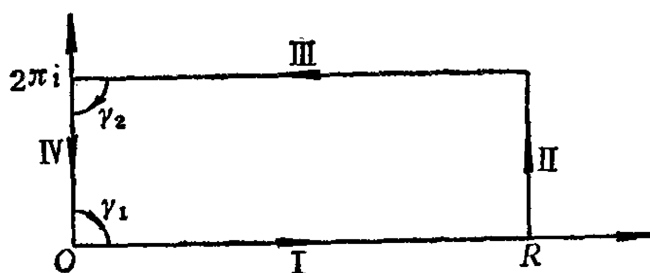


图 5-16

$$\int_{\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}}f(z)dz+\int_{\gamma_1}f(z)dz+\int_{\gamma_2}f(z)dz=0,$$

在Ⅱ上，$z=R+iy$，$0\leqslant y\leqslant 2\pi$,

$$|e^z-1|\geqslant e^R-1>\frac{1}{2}e^R\quad(R\text{适当大}),$$

$$|z|^2=R^2+y^2\leqslant 2R^2\quad(R\geqslant 2\pi),$$

$$|f(z)|\leqslant 4R^2e^{-R},$$

$$\left|\int_{\mathrm{II}} f(z)dz\right|\leqslant 8\pi R^2e^{-R}\to 0\ \ (R\to+\infty).$$

在Ⅲ上，$z=x+2\pi i$，

$$\int_{\mathrm{III}} f(z)\,dz=-\int_r^R\frac{(x+2\pi i)^2}{e^x-1}dx.$$

在γ_1上，由于$f(z)\to 0\ (z\to 0)$，所以$\int_{\gamma_1} f(z)dz\to 0\ (r\to 0)$.

在γ_2上，由于$z=2\pi i$是$f(z)$的一级极点，所以

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz\to -\frac{1}{4}\cdot 2\pi i\operatorname{Res}(f,2\pi i)=2\pi^3 i.$$

于是

$$\int_r^R\frac{1}{e^x-1}[x^2-(x+2\pi i)^2]dx+2\pi^3 i$$

$$+\int_r^{2\pi-r}\frac{iy^2}{e^{iy}-1}dy+o(1)=0.$$

在上式的两边取虚部，然后令$r\to 0$，$R\to+\infty$便得到

$$-4\pi\int_0^{+\infty}\frac{x}{e^x-1}dx+2\pi^3-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}y^2dy=0,$$

$$-4\pi\int_0^{+\infty}\frac{x}{e^x-1}dx+2\pi^3-\frac{4}{3}\pi^3=0,$$

即

$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{e^x-1}\,dx=\frac{\pi^2}{6}.$$

如果设 $t=1-e^{-x}$，则上述积分化为$\int_0^1\frac{\log\frac{1}{1-x}}{x}dx$. 因此有

$$\int_0^1\frac{\log\frac{1}{1-t}}{t}\,dt=\frac{\pi^2}{6},$$

或

$$\int_0^1 \frac{\log t}{t-1}dt = \frac{\pi^2}{6}.$$

习　　题

求下列积分：

1. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$.

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,dx$.

3. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+6x^2+13}\,dx$.

4. $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)}$　$(a>b>0)$.

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a+\sin^2\theta}$　$(a>0)$.

6. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\,dx$.

7. $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin ax}{x^2+b^2}dx$　(a,b是正实常数).

8. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^3}\,dx$.

9. $\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^2}\,dx$　$(-1<p<1)$.

10. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx$　$(0<a<1)$.

11. $\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2+2x+2}\,dx$.

12. $\int_0^{+\infty} \frac{\log^2 x}{x^2+a^2}\,dx \quad (a>0)$.

13. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,\log x}{x^2+1}\,dx$.

14. $\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2-1}\,dx$.

提示：考虑图5-17所示的路径.

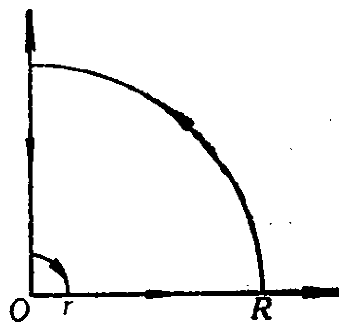


图 5-17

15. $\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{x^2+1}\,dx$.

16. $\int_0^1 \log\frac{1-x}{x}\cdot\frac{dx}{x+1}$.

提示：考虑函数$\log^2\frac{1-z}{z}$沿图5-14所示路径的积分。

17. $\int_0^1 \sqrt{\frac{(1-x)^3}{x}}\cdot\frac{1}{(1+x)^2}\,dx$.

18. $\int_{-1}^1 \frac{\sqrt[4]{(1-x)^3(1+x)}}{1+x^2}\,dx$.

19. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x-1}\,dx$.

20. $\int_0^{+\infty} x^{p-1}\cos x\,dx \quad (0<p<1)$.

提示：考虑图5-17所示的积分路径.

21. $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x-e^{-x}}{x}\,dx$.

22. $\int_0^{\pi}\cot(x-a)dx\quad(a=\alpha+i\beta,\beta\neq0)$.

23. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$.

24. $\int_0^{+\infty}\frac{x}{e^x+1}\,dx$.

25. $\int_0^{+\infty}\log\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)dx$.

26. 证明

$$\int_0^{+\infty}x^n e^{-x^{\frac{1}{4}}}\sin x^{\frac{1}{4}}\,dx=0\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

27. 证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x+ia)^2}dx=\sqrt{\pi}\quad(a\text{为实数}).$$

28. 证明：若$a>0$，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{zt}}{z}\,dz=\begin{cases}1, & \text{当}t>0;\\ 0, & \text{当}t<0,\end{cases}$$

其中左端的积分路径是直线$\mathrm{Re}z=a$. 这里的积分理解为在该直线上的有穷线段上的积分，当线段的两端点沿直线分别从上方和下方趋于无穷时的极限.

提示：分别考虑图5-18所示的两个积分路径γ_1,γ_2.

29. 证明

$$\int_0^{2\pi}\log|e^{i\theta}-1|d\theta=0.$$

并由此推出

$$\int_0^{\pi} \log \sin\theta d\theta = -\pi \log 2.$$

30. 证明

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4\rho} \sqrt{\rho + a},$$

其中 $a>0, \rho=\sqrt{a^2+b^2}$.

提示：取函数 $f(z)=e^{z^2(-a+bi)}$ 并沿图 5-19 所示的扇形域的周界积分，适当选取角度φ.

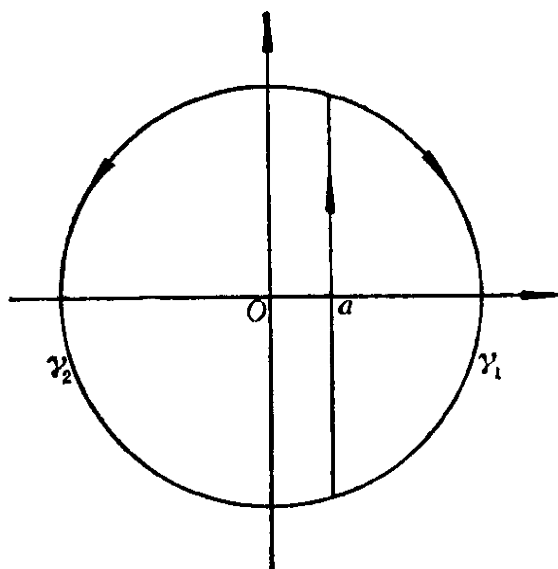


图 5-18

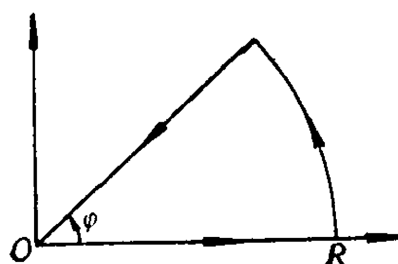


图 5-19

第六章　整函数与亚纯函数

§1　整函数展为无穷乘积

1．无穷乘积

设有复数序列u_n（$n=1,2,\cdots$），考虑乘积

$$p_n=\prod_{k=1}^{n}(1+u_k).$$

若因子（$1+u_n$）（$n=1,2,\cdots$）中有某一个为零，那么显然

$$\lim_{n\to\infty}p_n=0.$$

以下我们假定$1+u_n\neq0$（$n=1,2,\cdots$）．若$\lim\limits_{n\to\infty}p_n=p\neq0$，$p$是有穷的，则称无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)\tag{1}$$

收敛到p，记作$p=\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+u_n)$；若$n\to\infty$时，$p_n$不趋于一有穷极限，或者$p=0$，则称无穷乘积(1)发散．

若无穷乘积(1)收敛，则p_n，p_{n-1}都趋于$p\neq0$．因此$p_n/p_{n-1}=1+u_n$趋于1，即无穷乘积(1)收敛的必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0.\tag{2}$$

下面我们考虑(1)的绝对收敛问题．由于当$x\geqslant0$时，$1+x\leqslant e^x$，所以

$$|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|$$
$$\leqslant(1+|u_1|)(1+|u_2|)\cdots(1+|u_n|)$$

$$\leqslant e^{|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|}. \tag{3}$$

由此可见，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 与 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|u_n|)$ 同时收敛或同时发散。

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ 绝对收敛。

绝对收敛的无穷乘积有以下两个性质：

1）绝对收敛的无穷乘积一定收敛；

2）绝对收敛的无穷乘积可以改变因子的顺序而不影响无穷乘积的值 p。

证明 假定 $1+u_n\neq 0$. 设 $p_n=\sum_{k=1}^{n}(1+u_k)$. 只要证明级数

$$p_1+(p_2-p_1)+\cdots+(p_n-p_{n-1})+\cdots \tag{4}$$

收敛，且其和 $p\neq 0$.

设 $P_n=\prod_{k=1}^{n}(1+|u_k|)$，容易看出

$$\begin{aligned}|p_n-p_{n-1}|&=|(1+u_1)(1+u_2)\cdots(1+u_{n-1})u_n|\\&\leqslant(1+|u_1|)(1+|u_2|)\cdots(1+|u_{n-1}|)|u_n|\\&=P_n-P_{n-1}.\end{aligned} \tag{5}$$

因为，假设 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，所以 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|u_n|)$ 收敛，即级数

$$P_1+(P_2-P_1)+\cdots+(P_n-P_{n-1})+\cdots \tag{6}$$

收敛，由(5)式知，$\sum_{n=1}^{\infty}(p_n-p_{n-1})$ 绝对收敛，故级数(4)收敛，

即 $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=p$ 存在.

现在证明 $p\neq 0$. 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，$|1+u_n|\to 1\ (n\to\infty)$，

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{u_n}{1+u_n}\right|$收敛．由刚才证明的事实可知，无穷乘积

$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{u_n}{1+u_n}\right)$收敛，即

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{u_k}{1+u_k}\right)=\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)}=\frac{1}{p_n}$$

当$n\to\infty$时，有有穷极限，所以$\lim_{n\to\infty}p_n=p\neq 0$． 1)得证．

设由$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$改变顺序后的无穷乘积为

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n'). \tag{7}$$

u_n' $(n=1,2,\cdots)$是由序列u_n $(n=1,2,\cdots)$ 改变顺序后得到的序列．由于$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，故$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n'|$也收敛．由1)可知，$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n')$ 收敛，其值$p'\neq 0$．

现在证明 $p'=p$．设 $p_n'=\prod_{k=1}^{n}(1+u_k')$，$\lim_{n\to\infty}p_n'=p'$．对于任意固定的$n$，取$m\geqslant n$，使得$p_m'$含有$p_n$的一切因子．

$$p_m'=p_n(1+u_\alpha)(1+u_\beta)\cdots(1+u_\lambda),\quad \alpha,\beta,\cdots,\lambda\geqslant n+1.$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{p_m'}{p_n}-1\right|&=|(1+u_\alpha)(1+u_\beta)\cdots(1+u_\lambda)-1|\\&\leqslant(1+|u_\alpha|)(1+|u_\beta|)\cdots(1+|u_\lambda|)-1\\&\leqslant e^{R_n}-1,\end{aligned}\tag{8}$$

其中$R_n=|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\cdots$．令$n\to\infty$，这时$m\to\infty$，$R_n\to 0$，

所以由(8)式得到

$$\frac{p'}{p}=1, \quad p'=p.$$

2)得证.

2. Weierstrass因子分解定理

在第三章§2里，我们知道一没有零点的整函数$f(z)$可表为

$$f(z)=e^{\varphi(z)} \tag{9}$$

其中$\varphi(z)$是整函数. 若$f(z)$是一个只有有穷多个零点的整函数，$0,a_1,a_2,\cdots,a_n$（$a_i\neq 0$）是$f(z)$的零点，其级分别为$m,m_1,m_2,\cdots,m_n$. 令

$$P(z)=z^m(z-a_1)^{m_1}\cdots(z-a_n)^{m_n}$$

$$=Az^m\left(1-\frac{z}{a_1}\right)^{m_1}\cdots\left(1-\frac{z}{a_n}\right)^{m_n}, \quad A\neq 0.$$

那么，函数

$$h(z)=\frac{f(z)}{P(z)}$$

以$z=0,a_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$为可去奇点. 因为$h(z)$是整函数，且没有零点，所以$h(z)=e^{\psi(z)}$，$\psi(z)$是整函数. 于是

$$f(z)=P(z)e^{\psi(z)}$$

$$=e^{\psi(z)}z^m\left(1-\frac{z}{a_1}\right)^{m_1}\cdots\left(1-\frac{z}{a_n}\right)^{m_n} \tag{10}$$

（常数A归到$\psi(z)$中去了），即$f(z)$可以表示为一个多项式与一个没有零点的整函数的乘积. 而这个多项式仅以$f(z)$的零点为其零点.

现在设整函数$f(z)$不恒为零，且有无穷多个零点(如e^z-1, $\sin z,\cos z$等等). 因为$f(z)$的零点是可列的，我们可将$f(z)$的零点（如果$z=0$是$f(z)$的零点，则这点除外）按其模由小到大排列

成一序列（m级零点就在其中出现m次）：

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

$$\begin{cases} 0<|a_n|\leqslant|a_{n+1}|, \\ \lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=+\infty. \end{cases} \tag{11}$$

现在的问题是：在这种情况下，是否可以将$f(z)$表示为类似的无穷乘积、从而使它的零点变得非常明显．当然我们不能简单地将$f(z)$表为$z^m e^{\varphi(z)}\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{z}{a_n}\right)$，因为这个无穷乘积可能不收敛．为了回答这个问题，下面首先证明：对于任意给定满足(11)式的复数序列a_n（$n=1,2,\cdots$），必存在一整函数$g(z)$，它以a_n为零点，且仅以a_n为零点．

由于$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=+\infty$，我们可得到正整数序列$k_n$（$n=1,2,\cdots$），使得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{R}{|a_n|}\right)^{k_n}$对于任意的正数$R$都是收敛的．事实上，若存在正整数$k$，使得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{|a_n|^k}$收敛，则只需取$k_n=k$；如果在相反的情形，只需取$k_n=n$，因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{R}{|a_n|}\right)^n$是收敛的．

现在我们考虑无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{k_n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n-1}}. \tag{12}$$

对于任意固定的正数R，取正整数N，使得当$n\geqslant N$时，$|a_n|>2R$；当$n<N$时，$|a_n|\leqslant 2R$．由于去掉有穷个因子不改变无穷乘积的收敛性，所以我们只要考虑无穷乘积

$$\prod_{n=N}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{k_n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n-1}}$$

在圆$|z|\leqslant R$上的收敛性．为了方便起见，我们记

$$P_n(z)=\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{k_n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n-1}, \tag{13}$$

$$Q_n(z)=\log\left(1-\frac{z}{a_n}\right)+P_n(z), \tag{14}$$

$$E_n(z)=\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{P_n(z)}=e^{Q_n(z)}. \tag{15}$$

因为当$|z|\leqslant R$，$n\geqslant N$时，$\left|\frac{z}{a_n}\right|\leqslant\frac{1}{2}$，所以有

$$|Q_n(z)|\leqslant\frac{1}{k_n}\left(\frac{|z|}{|a_n|}\right)^{k_n}+\frac{1}{k_n+1}\left(\frac{|z|}{|a_n|}\right)^{k_n+1}+\cdots$$

$$\leqslant\left(\frac{|z|}{|a_n|}\right)^{k_n}\frac{1}{1-\frac{|z|}{|a_n|}},$$

$$|Q_n(z)|\leqslant 2\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{k_n}. \tag{16}$$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{k_n}$收敛，所以$\sum_{n=N}^{\infty}Q_n(z)$在圆$|z|\leqslant R$上绝对一致收敛．根据指数函数的连续性，

$$\prod_{n=N}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{k_n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n-1}}$$

$$=\prod_{n=N}^{\infty}E_n(z)=\exp\left(\sum_{n=N}^{\infty}Q_n(z)\right) \tag{17}$$

在$|z|\leqslant R$一致收敛．由Weierstrass定理（第四章§1定理3），这个无穷乘积表示一个在$|z|<R$内解析的函数，并且这个解析函数不为零．而$\prod_{n=1}^{N-1}E_n(z)$的零点是a_n（$n=1,2,\cdots$）当中落在圆$|z|\leqslant 2R$上的那些点．因此位于圆$|z|<R$内的a_n是$\prod_{n=1}^{\infty}E_n(z)$的零点，且在圆$|z|<R$内只有这些零点．

又当n充分大时，$|Q_n(z)|<1$（$|z|\leqslant R$），根据不等式（第四章§2的习题4）

$$|e^z-1|\leqslant\frac{7}{4}|z|,\ (|z|<1),$$

我们有

$$|E_n(z)-1|=|e^{Q_n(z)}-1|\leqslant\frac{7}{4}|Q_n(z)|$$

$$\leqslant\frac{7}{2}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{k_n}.$$

所以$\prod_{n=N}^{\infty}E_n(z)$在圆$|z|\leqslant R$上是绝对收敛的．

综上所述，我们得到

定理1　对于任给满足条件(11)的序列a_n（$n=1,2,\cdots$），存在恰以a_n为其零点的整函数

$$g(z)=\prod_{n=1}^{\infty}E_n(z).\tag{18}$$

右边的无穷乘积对于任意z绝对收敛．并且

$$p_n(z)=\prod_{k=1}^{n}E_k(z)\tag{19}$$

在任意圆$|z|<R$内一致收敛到$g(z)$.

推论1 等式

$$\frac{g'(z)}{g(z)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E_n'(z)}{E_n(z)} \tag{20}$$

在点$z\neq a_n$处成立,且在不包含点a_n的任意有穷闭域上一致成立.

证明 由Weierstrass定理,$p_n'(z)$在任意圆$|z|<R$内一致收敛到$g'(z)$.因此,在不包含点a_n的任意一个有界闭域d上,$p_n'(z)/p_n(z)$一致收敛到$g'(z)/g(z)$.但是

$$\frac{p_n'(z)}{p_n(z)}=\sum_{m=1}^{n}\frac{E_m'(z)}{E_m(z)}.$$

令$n\to\infty$,便立即得到(20)式.因为(20)式右边的级数在d上一致收敛,所以可对(20)式任意次逐项求导数.

推论2 任意亚纯函数都可以表示成两个整函数之比.

事实上,设$f(z)$是任一亚纯函数,由定理1,存在整函数$f_1(z)$,它以$f(z)$的极点为它的零点.令

$$f_2(z)=f(z)f_1(z).$$

只要在$f(z)$的极点a处规定$f_2(a)=\lim\limits_{z\to a}f_2(z)$,那么$f_2(z)$就是一个整函数.所以$f(z)=f_2(z)/f_1(z)$.

定理2(Weierstrass) 若函数$f(z)$是整函数,零点是

$$\overbrace{0,0,\cdots,0}^{m个},a_1,a_2,\cdots$$

$(0<|a_n|\leqslant|a_{n+1}|,\ \lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=+\infty)$,则$f(z)$可表为

$$f(z)=z^m e^{h(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{k_n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n-1}}, \tag{21}$$

其中$h(z)$是一整函数.

证明 由定理 1，存在一整函数$g(z)$，它恰以a_n $(n=1,2,\cdots)$为其零点. 设

$$H(z)=\frac{f(z)}{z^m g(z)}.$$

因为$g(z)$和$f(z)$有相同的零点，且同级，所以a_n是$H(z)$的可去奇点. $H(z)$是一个整函数，且没有零点，所以$H(z)=e^{h(z)}$，这里$h(z)$是整函数.因此得到

$$\begin{aligned}f(z)&=z^m e^{h(z)}g(z)\\&=z^m e^{h(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\\&\quad\times e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{k_n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n-1}}.\end{aligned}$$

定理证毕.

注意，定理 1 中的$g(z)$不是唯一的，因而定理 2 中的$f(z)$表成无穷乘积也不是唯一的.

3. Hadamard定理

在Weierstrass因子分解定理 2 中，仅仅知道$h(z)$是一整函数. Hadamard曾经指出，若对于$f(z)$的增长性作某种限制，那么$h(z)$是一多项式. 为此，我们要引进整函数的级的概念.

在前一章里我们知道，若$z=\infty$是整函数$f(z)$的可去奇点，则$f(z)$必是一个常数；若$z=\infty$是它的一个m级极点，则$f(z)$必是一个m次多项式；若$z=\infty$是$f(z)$的本性奇点，则$f(z)$是一超越整函数，如e^z，$\sin z$等.

设$f(z)$是一个非常数的整函数，$M(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$. 由最大模原理和Liouville定理可知，$M(r)$是单调递增趋于$+\infty$的

实函数．下面我们进一步研究$M(r)$的增长性．设$f(z)$是一个多项式

$$f(z)=a_0z^m+a_1z^{m-1}+\cdots+a_m,\quad a_0\neq 0.$$

容易看出，存在$A>B>0$，使得当$r\geqslant r_0$时，

$$Br^m\leqslant M(r)\leqslant Ar^m.$$

所以

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\log M(r)}{\log r}=m,$$

即$M(r)$的增长与r^m相同．但是任意一超越整函数$f(z)$的$M(r)$比r的任意幂增长要快，并且

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log M(r)}{\log r}=+\infty.$$

事实上，若存在$\lambda>0$，使得

$$M(r)\leqslant r^\lambda,$$

则$f(z)$必是一个次数不超过λ的多项式（见第三章§3的习题7）．又若

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{\log M(r)}{\log r}=l<+\infty,$$

那么对于任给$l_1>l$，存在序列$r_n\to+\infty$，使得

$$\frac{\log M(r_n)}{\log r_n}<l_1,$$

即 $M(r_n)<r_n^{l_1}$．因此同样可以推出，$f(z)$是一个次数不超过$[l]$的多项式，这与$f(z)$是超越整函数不符．因此，如果用

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log M(r)}{\log r}$$

作为衡量$f(z)$的增长性的级，那么m次多项式是m级的，而任一超越整函数就都是无穷级的．所以，以幂函数r^λ来估计超越整函数的$M(r)$的增长性，就不能达到区分它们增长快慢的目的．我

们必需用增长较快，并且便于比较的函数，这就是e^{r^λ}.

如果存在正数$\lambda>0$，使得对于充分大的r，$f(z)$的最大模$M(r)$满足条件

$$M(r)<e^{r^\lambda},$$

则称$f(z)$是有穷级整函数.在相反的情况下，则称$f(z)$是无穷级整函数.

若$f(z)$是有穷级整函数，则称$\rho=\inf\lambda$是$f(z)$的级.显然，整函数的级是非负的，$\rho\geqslant 0$.

根据下确界的性质，对于任意$\rho_1>\rho$，存在r_0，使得当$r>r_0$时，

$$M(r)<e^{r^{\rho_1}},\quad \frac{\log\log M(r)}{\log r}<\rho_1;$$

对于任意$\rho_2<\rho$，存在序列$r_n\to+\infty$，使得

$$M(r_n)>e^{r_n^{\rho_2}},\quad \frac{\log\log M(r_n)}{\log r_n}>\rho_2.$$

由于ρ_1，ρ_2是满足$\rho_2<\rho<\rho_1$的任意实数，所以

$$\rho=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log M(r)}{\log r}. \tag{22}$$

反之，由(22)式定义的ρ一定是$f(z)$的级.因此，(22)式可以作为$f(z)$的级的定义.

例1 设$P(z)=a_0z^m+a_1z^{m-1}+\cdots+a_m$.它的最大模

$$M(r)<Ar^m<e^{r^\lambda},$$

其中A是某一正常数，λ是任意正数,所以$\rho=\inf\lambda=0$.

例2 设$f(z)=e^{z^m}$(m是正整数),它的最大模$M(r)=e^{r^m}$.$\rho=m$.特别地，e^z是一级整函数.

下面我们证明对于有穷级整函数$f(z)$，存在一个正数α，使得级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|^\alpha}$收敛，这里$a_n$是$f(z)$不为零的零点，从而使

$f(z)$的无穷乘积表示式得到简化.

定理3 若函数$f(z)$是有穷级ρ的整函数，$a_n \neq 0$ ($n=1,2,\cdots$) 是$f(z)$的零点，则对于任意的正数ε，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\rho+\varepsilon}} < +\infty. \tag{23}$$

证明 设$\varepsilon>0$是任意正数，

$$Q_n(z)=(a_1-z)(a_2-z)\cdots(a_n-z).$$

取圆周γ_R: $|z|=R=3|a_n|$.由Cauchy公式得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta Q_n(\zeta)}d\zeta=\frac{f(0)}{Q_n(0)}=\frac{f(0)}{a_1a_2\cdots a_n}. \tag{24}$$

在圆周$|\zeta|=R=3|a_n|$上，

$$|Q_n(\zeta)| \geqslant (R-|a_1|)(R-|a_2|)\cdots(R-|a_n|)$$
$$\geqslant (R-|a_n|)^n=2^n|a_n|^n.$$

因为$f(z)$的级是ρ，所以当R充分大时，

$$\max_{|\zeta|=R}|f(\zeta)| \leqslant e^{R^{\rho+\varepsilon_1}},$$

其中ε_1是小于ε的任意正数.于是

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta Q_n(\zeta)}d\zeta\right| \leqslant \frac{e^{(3|a_n|)^{\rho+\varepsilon_1}}}{(2|a_n|)^n}.$$

由(24)式有

$$\frac{|f(0)|}{|a_1||a_2|\cdots|a_n|} \leqslant \frac{e^{(3|a_n|)^{\rho+\varepsilon_1}}}{2^n|a_n|^n}.$$

因为$|a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \cdots \leqslant |a_n|$，所以

$$2^n \leqslant \frac{1}{|f(0)|}\ e^{(3|a_n|)^{\rho+\varepsilon_1}}.$$

我们不妨设$f(0)=1$，所以

$$n \leqslant \frac{1}{\log 2}(3|a_n|)^{\rho+\varepsilon_1}=A_\rho|a_n|^{\rho+\varepsilon_1},$$

其中A_ρ是与ρ有关的常数．由此得到

$$\frac{1}{|a_n|^{\rho+\varepsilon_1}} \leqslant \frac{A_\rho}{n},$$

或

$$\frac{1}{|a_n|^{\rho+\varepsilon}} \leqslant \frac{A_\rho^\lambda}{n^\lambda}, \quad \lambda = \frac{\rho+\varepsilon}{\rho+\varepsilon_1} > 1.$$

因当 $\lambda > 1$ 时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\lambda}$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\rho+\varepsilon}}$收敛．证毕．

使得级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\alpha}$收敛的正数$\alpha$的下确界$\rho_1 = \inf \alpha$，称为整函数$f(z)$的零点的收敛指数．显然有$\rho_1 \geqslant 0$．定理 3 表明

$$\rho_1 \leqslant \rho. \tag{25}$$

若p是使$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{p+1}}$收敛的非负最小整数，那么

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_n}\right)^p} \tag{26}$$

称为典型乘积，p称为它的格．根据定理 1，$P(z)$是整函数，它恰以a_n（$n = 1,2,\cdots$）为零点．

由收敛指数的定义，容易看出

$$\rho_1 - 1 \leqslant p \leqslant \rho_1,$$

因为若ρ_1不是整数，则$p = [\rho_1]$；若ρ_1是整数，则当$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\rho_1}}$收敛时，$p = \rho_1 - 1$；当$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\rho_1}}$发散时，$p = \rho_1$．再由(25)式，得到

$$\rho_1 - 1 \leqslant p \leqslant \rho_1 \leqslant \rho. \tag{27}$$

现在，根据Weierstrass因子分解定理，有穷级整函数$f(z)$

可以表示为

$$f(z)=z^m e^{h(z)}P(z), \tag{28}$$

其中$P(z)$是$f(z)$的零点的典型乘积.

定理 4 (Hadamard) 若函数$f(z)$是有穷级整函数，其级为ρ，则(28)式成立，其中$h(z)$是次数不超过ρ的多项式，$P(z)$是$f(z)$的零点的典型乘积，m是$f(z)$在原点的零点的级.

证明 按照Weierstrass因子分解定理，

$$f(z)=z^m e^{h(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_n}\right)^p},$$

其中$h(z)$是一整函数.现在来证明$h(z)$是一个次数不超过ρ的多项式. 对于任意$R>1$，取正整数N(依赖于R)，使得当$n\leqslant N$时，$|a_n|\leqslant R$；当$n>N$时，$|a_n|>R$. 记

$$f_1(z)=z^m\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{z}{a_n}\right),$$

$$f_2(z)=\exp\left\{h(z)+\sum_{n=1}^{N}r_p\left(\frac{z}{a_n}\right)\right\}\prod_{n=N+1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{r_p\left(\frac{z}{a_n}\right)},$$

其中$r_p(u)=u+\frac{u^2}{2}+\cdots+\frac{u^p}{p}$ (若$p=0$，$r_p(u)=0$). $f_1(z)$，$f_2(z)$都是整函数，且

$$f(z)=f_1(z)f_2(z).$$

在圆周$|z|=2R$上，

$$|f(z)|\geqslant(2R)^m\prod_{n=1}^{N}\left(\frac{2R}{R}-1\right)|f_2(z)|\geqslant|f_2(z)|.$$

设$M(r)$是$f(z)$在圆周$|z|=r$上的最大模.在圆周$|z|=2R$上，

$$|f(z)|\leqslant M(2R).$$

所以在圆周$|z|=2R$上，

$$|f_2(z)|\leqslant M(2R).$$

由最大模原理，

$$|f_2(z)|\leqslant M(2R),\quad |z|<R. \tag{29}$$

$f_2(z)$在圆$|z|<R$内没有零点，所以

$$f_2(z)=e^{\varphi(z)},$$

其中

$$\varphi(z)=h(z)+\sum_{n=1}^{N} r_p\left(\frac{z}{a_n}\right)$$
$$+\sum_{n=N+1}^{\infty}\left\{\log\left(1-\frac{z}{a_n}\right)+r_p\left(\frac{z}{a_n}\right)\right\}. \tag{30}$$

上式右边的级数在圆$|z|<R$内一致收敛，这是因为

$$\left|\log\left(1-\frac{z}{a_n}\right)+r_p\left(\frac{z}{a_n}\right)\right|=\left|-\sum_{m=p+1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{z}{a_n}\right)^m\right|$$
$$\leqslant\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{p+1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m+p+1}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^m.$$

由于$|z|<R<|a_n|$ $(n>N)$，所以右边的级数收敛，于是

$$\left|\log\left(1-\frac{z}{a_n}\right)+r_p\left(\frac{z}{a_n}\right)\right|\leqslant K\frac{1}{|a_n|^{p+1}},$$

其中K是只与R有关，而与z无关的常数.

在圆$|z|<R$内对$\varphi(z)$求m次导数，这里$m>\rho\geqslant p$. 注意到$r_p(z)$是p次多项式，所以

$$\varphi^{(m)}(z)=h^{(m)}(z)+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{(-1)^m(m-1)!}{(z-a_n)^m}.$$

令$z=0$，得到

$$\frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!}=\frac{h^{(m)}(0)}{m!}-\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{ma_n^m}. \tag{31}$$

另一方面 $\varphi(z)$在圆$|z|<R$内可展为幂级数

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n,\quad |z|<R.$$

由(29)式,

$$e^{\mathrm{Re}\varphi(z)}\leqslant M(2R),\quad |z|<R.$$

$$\mathrm{Re}\varphi(z)\leqslant\log M(2R),$$

所以（见第四章§2的习题9）

$$|c_m|=\left|\frac{\varphi^{m}(0)}{m!}\right|\leqslant\frac{4\log M(2R)-2\mathrm{Re}\varphi(0)}{r^m},\quad 0<r<R.$$

令$r\to R$，得到

$$\left|\frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!}\right|\leqslant\frac{4\log M(2R)-2\mathrm{Re}\varphi(0)}{R^m}.$$

因此，由(31)式得到

$$\left|\frac{h^{(m)}(0)}{m!}\right|\leqslant\frac{4\log M(2R)-2\mathrm{Re}\varphi(0)}{R^m}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|^m}.\tag{32}$$

因为$f(z)$是ρ级整函数，所以对于$0<\varepsilon<m-\rho$，当R充分大时有

$$M(2R)<e^{(2R)^{\rho+\varepsilon}},$$

$$\log M(2R)<(2R)^{\rho+\varepsilon}.$$

于是

$$\frac{4\log M(2R)-2\mathrm{Re}\varphi(0)}{R^m}$$

$$<\frac{4(2R)^{\rho+\varepsilon}-2\mathrm{Re}\varphi(0)}{R^m}\to 0\quad(R\to+\infty).$$

此外，因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|^m}$收敛，所以当$R\to+\infty$时，$N=N(R)\to+\infty$. $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|^m}\to 0$. 于是，由(32)式，立即得到

$$h^{(m)}(0)=0,$$

对于所有的正整数$m>\rho$成立，即$h(z)$是次数不超过ρ的多项式.定理证毕.

下面两个定理是Hadamard定理的应用.第一个是Picard定理的一个特殊情形.

定理 5 若函数$f(z)$是有穷级整函数，则$f(z)$取到每一个有穷复数，至多可能除一个例外值.

证明 用反证法.假设有两个不同复数α,β,对于一切有穷复数z,$f(z)\neq\alpha$,$f(z)\neq\beta$，那么$f(z)-\alpha$也是有穷级整函数，且$f(z)-\alpha\neq 0$,因此$f(z)-\alpha=e^{g(z)}$,$g(z)$是整函数. 由Hadamard定理，$g(z)$是一个多项式，其次数不超过$f(z)$的级.但是$e^{g(z)}$不取值$\beta-\alpha$，即$g(z)$不取$\log(\beta-\alpha)$，这与代数基本定理相矛盾，因为多项式取到每一个有穷值.定理证毕.

定理 6 非整数级的有穷级整函数必有无穷多个零点.

证明 若不然，整函数$f(z)$的零点只有有穷多个：$a_1,a_2,\cdots,a_n$，那么由Hadamard定理，$f(z)=e^{g(z)}(z-a_1)\cdots(z-a_n)$，$g(z)$是一多项式，它的次数$m$不超过$f(z)$的级$\rho$，$m\leqslant\rho$，$e^{g(z)}$的级是$m$(见习题 6). 但是另一方面，$f(z)$和$e^{g(z)}$应有相同的级，所以$m=\rho$. 而$\rho$是非整数，这就得到矛盾了. 定理证毕.

例 3 将$f(z)=\sin\pi z$展为无穷乘积.

$$\sin\pi z=\frac{1}{2i}(e^{\pi zi}-e^{-\pi zi}).$$

由于

$$|\sin\pi z|\leqslant\frac{1}{2}(e^{\pi|z|}+e^{\pi|z|})=e^{\pi|z|},$$

所以

$$M(r)\leqslant e^{\pi r}.$$

另一方面，因为

$$|\sin\pi ir| = \frac{1}{2}(e^{\pi r} - e^{-\pi r}) > \frac{1}{4}e^{\pi r} \qquad (r > r_0),$$

所以

$$M(r) > \frac{1}{4}e^{\pi r} \qquad (r > r_0).$$

于是，$\sin\pi z$是有穷级整函数，其级$\rho = 1$．它的零点是：

$$z = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

按模的大小排列为：

$$0,\ a_1 = 1,\ a_2 = -1,\ a_3 = 2,\ a_4 = -2, \cdots,$$
$$a_{2n-1} = n,\ a_{2n} = -n, \cdots.$$

级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|}$发散，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|^2}$收敛，因此$p = 1$．由 **Hadamard** 定理得到

$$\sin\pi z = ze^{Az+B}P(z),$$

其中

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

若将z易为$-z$，立即得到$A = 0$，于是

$$\sin\pi z = ze^B\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right),$$

或

$$\frac{\sin\pi z}{z} = e^B\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

在上式中令$z \to 0$便有

$$e^B = \lim_{z\to 0}\frac{\sin\pi z}{z} = \pi.$$

最后得到

$$\sin\pi z = \pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right). \qquad (33)$$

此外，根据定理1的推论1（公式(20)），对于典型乘积

$$P(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}},$$

我们有

$$\frac{P'(z)}{P(z)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-a_n}+\frac{1}{a_n}\right),\qquad z\neq a_n.$$

另一方面，由于$\sin\pi z=\pi zP(z)$，等式两边求导数得到

$$\pi\cos\pi z=\pi P(z)+\pi zP'(z).$$

所以

$$\pi\cot\pi z=\frac{1}{z}+\frac{P'(z)}{P(z)},\qquad z\neq a_n.$$

$$\pi\cot\pi z=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-a_n}+\frac{1}{a_n}\right).$$

再求一次导数，得到

$$\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}=\frac{1}{z^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-a_n)^2}.$$

将a_n的值代入$\cot\pi z$的表达式中，并且将具有指标n和$-n$的两项结合起来就得到

$$\pi\cot\pi z=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2},\qquad z\neq\pm n, \qquad (34)$$

以及

$$\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2},\qquad z\neq\pm n. \qquad (35)$$

习　题

1．求下列无穷乘积的收敛范围：

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^n}{2^n}\right),\quad \prod_{n=1}^{\infty}(1+c_n z),$$

其中$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|$收敛．

2．证明当$|z|<1$时，$\prod_{n=0}^{\infty}(1+z^{2^n})=\frac{1}{1-z}$．

3．证明$\frac{\sin(iz)}{e^{2z}-1}=e^{h(z)}$，其中$h(z)$是整函数，问$h(z)=?$

4．若$f_1(z)$，$f_2(z)$是有穷级整函数，其级分别为ρ_1,ρ_2，则$f_1(z)f_2(z)$与$f_1(z)+f_2(z)$的级$\leqslant\max(\rho_1,\rho_2)$．又若$\rho_1\neq\rho_2$，则$f_1(z)+f_2(z)$的级$\rho=\max(\rho_1,\rho_2)$．

5．若当$|z|>R$时，整函数$f(z)$满足条件

$$|f(z)|<e^{A|z|^{\alpha}+B},$$

其中A,B,α是正常数，则$f(z)$的级$\rho\leqslant\alpha$．

6．求下列整函数的级：

$$e^{Q(z)}\ (Q(z)\text{是}m\text{次多项式}),\quad \cos\sqrt{z},\quad e^{e^z}.$$

7．若$f(z)$是有穷级整函数，级为ρ，则$P(z)f(z)$的级也是ρ，这里$P(z)$是一多项式．

8．将下列函数展为无穷乘积：

$$\cos z,\quad e^{az}-e^{bz},\quad \operatorname{ch}z-\cos z.$$

9．证明

$$\frac{\sin\pi z}{\pi z(1-z)}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z-z^2}{n^2+n}\right).$$

10．证明Wallis公式：

$$\frac{\pi}{2}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}.$$

11．设函数序列 $f_n(z)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在域D内解析，且 $|f_n(z)|\leqslant a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，求证无穷乘积$\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$在$D$内一致收敛.

12．证明$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$在整个有穷平面上收敛，极限函数是一个整函数.

13．设$0<|a|<1$，$|z|\leqslant r<1$，证明

$$\left|\frac{a+|a|z}{(1-\bar{a}z)a}\right|\leqslant\frac{1+r}{1-r}.$$

14．(**Blaschke**)设复数序列a_n $(n=1,2,\cdots)$ 满足条件：$0<|a_n|<1$，$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)<+\infty$，证明无穷乘积

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-z}{1-\bar{a}_n z}\cdot\frac{|a_n|}{a_n}$$

在圆$|z|\leqslant r$ $(0<r<1)$上一致收敛．因而$f(z)$在单位圆$|z|<1$内解析，$f(z)$以a_n为零点且没有别的零点，$|f(z)|\leqslant 1$.

15．设a_n是复数序列，$0<|a_n|<1$，若$m\neq n$，$a_m\neq a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|^2)<+\infty$，证明乘积

$$g(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{z-a_n}{z-\dfrac{1}{\bar{a}_n}}$$

在圆$|z|<1$内收敛，$g(z)$在圆$|z|<1$内解析，它以a_n为零点，且$|g(z)|\leqslant 1$.

§2 亚纯函数展为部分分式

1. Mittag-Leffler定理

在第四章里我们知道，如果一个亚纯函数 $f(z)$ 只有有穷多个极点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，且 $z=\infty$ 是它的极点或可去奇点，则 $f(z)$ 是有理函数，并且

$$f(z)=c+P(z)+\sum_{j=1}^{n}\psi_j(z), \tag{36}$$

其中 $\psi_j(z)$ 是 $f(z)$ 在点 a_j 的主要部分．对于一个超越亚纯函数 $f(z)$，$z=\infty$ 或是它的本性奇点，或是它的极点的极限点．在前一种情形，$f(z)$ 的极点仍然是有穷多个，那么函数

$$U(z)=f(z)-\sum_{j=1}^{n}\psi_j(z)$$

是一个超越整函数，所以

$$f(z)=U(z)+\sum_{j=1}^{n}\psi_j(z); \tag{37}$$

在后一种情形，$f(z)$ 有无穷多个极点．设这些极点是 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$，仍按模的大小排列起来，$|a_n|\leqslant|a_{n+1}|$，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=+\infty$．现在的问题是：能否将 $f(z)$ 展为以 $\psi_n(z)$ 为一般项的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\psi_n(z)$？显然，一般来说，这个级数在 $z\neq a_n$ 处不一定收敛．但是下面的定理成立．

定理 1（Mittag-Leffler） 若函数 $f(z)$ 是一亚纯函数，a_n（n

$=1,2,\cdots$) 是$f(z)$的互相判别的极点，且

$$|a_n|\leqslant|a_{n+1}|,\qquad \lim_{n\to\infty}|a_n|=+\infty,$$

则

$$f(z)=U(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\{\psi_n(z)-P_n(z)\},\tag{38}$$

其中$\psi_n(z)$是$f(z)$在极点a_n的主要部分，$P_n(z)$是多项式，$U(z)$是整函数．

证明 与前一节相类似，我们先作一个亚纯函数$\varphi(z)$，它恰以a_n为极点，且在点a_n的主要部分是$\psi_n(z)$．

取正数$\varepsilon_n>0$，使得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n$收敛．若$a_1=0$，则取$P_1(z)=0$；对于异于零的$a_n$，由于$\psi_n(z)$是关于$\dfrac{1}{z-a_n}$的多项式，即$z$的有理函数，它在圆$|z|<|a_n|$内是解析的，因此可以展为Taylor级数

$$\psi_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\psi_n^{(k)}(0)}{k!}z^k,\ |z|<|a_n|,\tag{39}$$

并且右边的级数在圆$|z|<\frac{1}{2}|a_n|$内一致收敛到$\psi_n(z)$，所以存在整数p_n，使得

$$\left|\psi_n(z)-\sum_{k=0}^{p_n}\frac{\psi_n^{(k)}(0)}{k!}z^k\right|<\varepsilon_n.$$

记

$$P_n(z)=\sum_{k=0}^{p_n}\frac{\psi_n^{(k)}(0)}{k!}z^k.\tag{40}$$

设$R>0$是任意正数，取正整数$N=N(R)$，使得当$n>N$时，

$|a_n|>2R$；当$n\leqslant N$时，$|a_n|\leqslant 2R$．于是当$n>N$，$|z|<R$ $\left(|z|<\frac{1}{2}|a_n|\right)$时，

$$|\psi_n(z)-P_n(z)|<\varepsilon_n.$$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n$收敛，所以

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\{\psi_n(z)-P_n(z)\}$$

在圆$|z|<R$内一致收敛．当$n>N$时，函数$\psi_n(z)$的唯一极点是$z=a_n$，它不在圆$|z|<R$内．根据Weierstrass定理，

$$\varphi_1(z)=\sum_{n=N+1}^{\infty}\{\psi_n(z)-P_n(z)\}$$

在圆$|z|<R$内解析．于是，函数

$$\varphi(z)=\sum_{n=1}^{N}\{\psi_n(z)-P_n(z)\}+\varphi_1(z)$$

在圆$|z|<R$内以位于该圆内的那些a_n为极点，它的主要部分为$\psi_n(z)$．因为R是任意的，所以$\varphi(z)$是我们要求的亚纯函数．

现在考虑函数

$$U(z)=f(z)-\varphi(z).$$

因为$\varphi(z)$和$f(z)$有相同的极点a_n $(n=1,2,\cdots)$，且在a_n有相同的主要部分$\psi_n(z)$，所以若定义$U(a_n)=\lim\limits_{z\to a_n}\{f(z)-\varphi(z)\}$，那么$U(z)$是一整函数，即

$$f(z)=U(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\{\psi_n(z)-P_n(z)\}.$$

定理证毕．

2. Cauchy方法

根据Mittag-Leffler 定理，亚纯函数可以展为部分分式，但对于其中的$U(z)$，我们仅仅知道它是一整函数．下述的 Cauchy 方法是应用留数定理，在对 $f(z)$ 作补充假定下（实际上也是对$f(z)$增长性的一种限制），证明$U(z)$是一个多项式．

设γ_n是一列包含原点在其内部，且不经过亚纯函数 $f(z)$ 的极点的可求长简单闭曲线，满足下面的条件：

1） γ_{n+1}位于γ_n的外部 $(n=1,2,\cdots)$；

2） $d_n=d(0,\gamma_n)\to+\infty \quad (n\to+\infty)$；　　　　(41)

3） $\dfrac{L_n}{d_n}\leqslant A$(常数)，$L_n$是$\gamma_n$的长度．

假定$f(z)$在γ_n上满足条件：

$$|f(z)|\leqslant B|z|^p, \tag{42}$$

其中p是非负整数，B是正常数．

我们还不妨设$f(z)$在点$z=0$解析．在相反的情形，只要考虑$f(z)-\psi_0(z)$，$\psi_0(z)$是$f(z)$在点$z=0$ 邻域内 Laurent 展式的主要部分．考虑积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

由留数定理得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=f(z)-\sum_{\gamma_n}\psi_k(z) \tag{43}$$

（见第五章§1的习题13）．事实上，若设$\Psi(z)=\sum\limits_{\gamma_n}\psi_k(z)$，它是有理函数，那么$f(z)-\Psi(z)$在$\gamma_n$内部解析，所以由 Cauchy 公式，

$$f(z)-\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{f(\zeta)-\Psi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{\Psi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

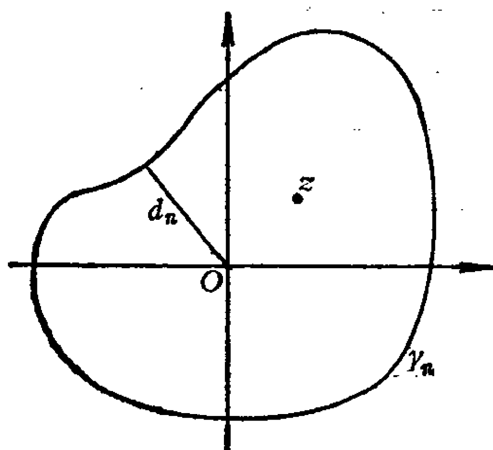


图 6-1

$\dfrac{\Psi(\zeta)}{\zeta-z}$ 作为ζ的函数，在γ_n的外部是解析的，$\zeta=\infty$是它的m($m\geqslant 2$)级零点．因此，由外部Cauchy公式(图6-1)，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{\Psi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=0.$$

于是

$$f(z)-\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

因为

$$\frac{1}{\zeta-z}=\sum_{j=0}^{p}\frac{z^j}{\zeta^{j+1}}+\frac{1}{\zeta-z}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{p+1},$$

所以

$$f(z)=\Psi(z)+\sum_{j=0}^{p}\frac{z^j}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{j+1}}d\zeta$$

$$+\frac{z^{p+1}}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{p+1}(\zeta-z)}d\zeta,$$

其中右边的第一个积分由Cauchy型积分公式与(43)式，有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{p+1}}d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{j!}\cdot\frac{d^j}{dz^j}\left(\int_{\gamma_n}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right)\Big|_{z=0}$$

$$=\frac{1}{j!}\{f^{(j)}(z)-\Psi^{(j)}(z)\}\Big|_{z=0}$$

$$=\frac{1}{j!}f^{(j)}(0)-\frac{1}{j!}\Psi^{(j)}(0).$$

于是

$$f(z)=\sum_{j=0}^{p}\frac{f^{(j)}(0)}{j!}z^j$$

$$+\sum_{\gamma_n}\left\{\psi_k(z)-\sum_{j=0}^{p}\frac{\psi_k^{(j)}(0)}{j!}z^j\right\}$$

$$+z^{p+1}I_n(z), \tag{44}$$

其中

$$I_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{p+1}(\zeta-z)}d\zeta.$$

因为在γ_n上，$|\zeta|\geqslant d_n$，$|f(\zeta)|\leqslant B|\zeta|^p$，并且当$n\to+\infty$时，$d_n\to+\infty$，所以当$n$充分大时，可使$d_n>|z|$（见图6-1）. 于是

$$|I_n(z)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{BL_n}{d_n(d_n-|z|)}$$

$$\leqslant\frac{AB}{2\pi(d_n-|z|)}\to 0\quad(n\to+\infty).$$

从上面我们还容易看出，当$|z|<R$时，

$$|z^{p+1}I_n(z)|\leqslant\frac{ABR^{p+1}}{2\pi(d_n-R)},$$

即$z^{p+1}I_n(z)$在圆$|z|<R$内一致趋于零，于是我们得到

$$f(z)=\sum_{j=0}^{p}\frac{f^{(j)}(0)}{j!}z^j$$

$$+\lim_{n\to+\infty}\sum_{\gamma_n}\left\{\psi_k(z)-\sum_{j=0}^{p}\frac{\psi_k^{(j)}(0)}{j!}z^j\right\}. \qquad (45)$$

如果级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\psi_k(z)-\sum_{j=0}^{p}\frac{\psi_k^{(j)}(0)}{j!}z^j\right\}$$

绝对收敛，那么该级数与各项的顺序无关，(45)式可写为

$$f(z)=\sum_{j=0}^{p}\frac{f^{(j)}(0)}{j!}z^j$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\psi_k(z)-\sum_{j=0}^{p}\frac{\psi_k^{(j)}(0)}{j!}z^j\right\}. \qquad (46)$$

上式在除去$f(z)$的极点外处处成立，并且在不包含 $f(z)$ 的极点的任意有界闭域上一致收敛．

例1 将 $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}-\dfrac{1}{z}$展为部分分式．

$\lim\limits_{z\to 0}f(z)=0, z=0$是$f(z)$的可去奇点，我们定义 $f(0)=0$．

$z=k\pi\ (k=\pm1,\pm2,\cdots)$是$f(z)$的一级极点．

$$\mathrm{Res}(f,\ k\pi)=\left.\frac{z-\sin z}{(z\sin z)'}\right|_{z=k\pi}=(-1)^k,$$

因此

$$\psi_k(z)=\frac{(-1)^k}{z-k\pi},\qquad k=\pm1,\pm2,\cdots.$$

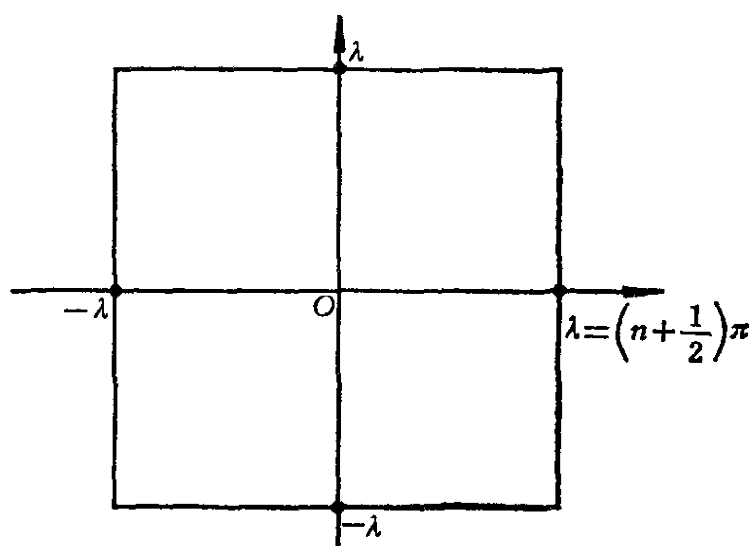


图 6-2

取γ_n为图6-2所示的正方形．它的边平行于坐标轴．显然γ_n满足(41)式的条件．现在来证明$f(z)$在γ_n上是有界的，为此只要证明$\frac{1}{\sin z}$在γ_n上是有界的．

$$\left|\frac{1}{\sin z}\right|^2=\frac{1}{\operatorname{sh}^2 y+\sin^2 x}$$

$$=\frac{2}{\operatorname{ch}2y-\cos 2x}.$$

在γ_n的平行于y轴的两边上，$\sin^2 x=1$，

$$\left|\frac{1}{\sin z}\right|^2=\frac{1}{\operatorname{sh}^2 y+1}\leqslant 1;$$

在平行于x轴的两边上，

$$\left|\frac{1}{\sin z}\right|^2\leqslant\frac{2}{\operatorname{ch}2y-1}=\frac{4}{e^{2y}+e^{-2y}-2},$$

其中$y=\pm(2n+1)\pi/2$．当$n\to+\infty$时，

$$\frac{4}{e^{2y}+e^{-2y}-2}\to 0.$$

所以$\frac{1}{\sin z}$在γ_n上有界．因此$f(z)$在γ_n上有界．若取$p=0$，则$f(z)$满足条件(42)式．

$$\psi_k(0)=\frac{(-1)^{k+1}}{k\pi},\quad k=\pm1,\pm2,\cdots.$$

由(45)式得到

$$\frac{1}{\sin z}-\frac{1}{z}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=-n}^{n}{}'(-1)^k\left(\frac{1}{z-k\pi}+\frac{1}{k\pi}\right),\qquad(47)$$

其中$\sum'$表示$k\neq0$. 由于对任意$R>0$,当$|z|<R$时,

$$\left|(-1)^k\left(\frac{1}{z-k\pi}+\frac{1}{k\pi}\right)\right|$$

$$=\left|\frac{z}{k\pi(z-k\pi)}\right|\leqslant\frac{1}{k^2}\cdot\frac{R}{\pi\left(\pi-\frac{R}{k}\right)},$$

所以$\sum_{-\infty}^{\infty}{}'(-1)^k\left(\frac{1}{z-k\pi}+\frac{1}{k\pi}\right)$绝对收敛，并且在任意不包含整数点的有界闭域上是一致收敛的. 故有

$$\frac{1}{\sin z}-\frac{1}{z}=\sum_{-\infty}^{\infty}{}'(-1)^k\left(\frac{1}{z-k\pi}+\frac{1}{k\pi}\right).$$

若将k和$-k$对应的两项相加，则得到

$$\frac{1}{\sin z}=\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k2z}{z^2-k^2\pi^2}.\qquad(48)$$

若再逐项微商一次，则有

$$-\frac{\cos z}{\sin^2 z}+\frac{1}{z^2}=\sum_{-\infty}^{\infty}{}'(-1)^{k+1}\frac{1}{(z-k\pi)^2},$$

即

$$\frac{\cos z}{\sin^2 z}=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(z-k\pi)^2}.\qquad(49)$$

利用上述方法同样可将$\cot z$展为部分分式（见上节(34)式）.

习　　题

1. 已知亚纯函数 $f(z)$在$z=1,2,3,\cdots$有一级极点，并且$\mathrm{Res}(f,n)=n$，求$f(z)$的一般形式.

2. 已知亚纯函数$f(z)$在$z=1,2,3,\cdots$有二级极点，且$f(z)$在点$z=n$的邻域内Laurent展式的主要部分为$\psi_n(z)=\dfrac{n}{(z-n)^2}$，求$f(z)$的一般形式.

3. 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}$展为部分分式.

4. 将函数$\dfrac{1}{\cos z}$, $\tan z$展为部分分式.

5. 试利用$z\cot z$在点$z=0$的Taylor展式（第四章§2的习题12)和$\cot z$的部分分式证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}=2^{2k-1}\frac{B_k}{(2k)!}\pi^{2k},\quad B_k\text{是Bernoulli数}.$$

6. 若 $\alpha\neq 0,\dfrac{\beta}{\alpha}\neq\pm1,\pm2,\cdots$，则

$$\frac{\pi}{\alpha}\cot\frac{\pi\beta}{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{n\alpha+\beta}-\frac{1}{n\alpha+(\alpha-\beta)}\right\}.$$

并由此证明

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{7\cdot8}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n-1)}+\cdots=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

7. 设函数$f(z)$是一整函数，它的零点$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$都是一级的，$0<|a_1|\leqslant|a_2|\leqslant\cdots$, $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\infty$. γ_n满足（41）式的条件，$f(z)$在γ_n上满足条件

$$\max_{z\in\gamma_n}\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| = o(d_n),$$

求证

$$f(z) = f(0)e^{\frac{zf'(0)}{f(0)}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}}.$$

8. 证明

$$\cos\frac{\pi z}{4}-\sin\frac{\pi z}{4} = (1-z)\left(1+\frac{z}{3}\right)\left(1-\frac{z}{5}\right)\cdots.$$

提示：注意等式$\cos\frac{\pi z}{4}-\sin\frac{\pi z}{4} = \sqrt{2}\sin\frac{(1-z)\pi}{4}$，并利用上题.

9. 设亚纯函数$f(z)$只有有穷多个极点$a_1, a_2, \cdots, a_m$，并且a_k $(1\leqslant k\leqslant m)$都不是整数，$z=\infty$是$f(z)$的$p$级零点，$p\geqslant 2$，证明

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=-n}^{n} f(k) = -\pi\sum\limits_{k=1}^{m}\mathrm{Res}(f(z)\cot\pi z, a_k)$;

(2) $$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=-n}^{n}(-1)^k f(k)$$

$$= -\pi\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}(f(z)/\sin\pi z, a_k).$$

10. 利用上题求下列级数的和：

(1) $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(a+n)^2}$，$a$不是整数；

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2}$，$a$是不为零的实数；

(3) $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{n^2+n+1}$.

§3 Γ 函 数

1. Γ(z)的定义

在数学分析中，函数$\Gamma(x)$是由下面的积分定义的

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt \qquad (x>0).$$

现在将Γ函数扩充到复平面上．自然，我们希望扩充后的函数在实轴上与$\Gamma(x)$一致．因此考虑积分

$$\Gamma(z)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt, \tag{50}$$

其中$z=x+iy$是一复数．因为$|e^{-t}t^{z-1}|=e^{-t}t^{x-1}$，所以当$\mathrm{Re}z=x>0$时，积分(50)绝对收敛，$\Gamma(z)$在$\mathrm{Re}z>0$内有定义．以下我们证明$\Gamma(z)$在右半平面$\mathrm{Re}z>0$内是解析的．

首先考虑由下面积分确定的函数

$$F(z)=\int_a^b e^{-t}t^{z-1}dt,$$

其中$0<a<b<+\infty$．$F(z)$是一个整函数．因为对于任一有穷复数z，

$$t^{z-1}=e^{(z-1)\log t}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log t)^n}{n!}(z-1)^n.$$

右边的级数在$a\leqslant t\leqslant b$上一致收敛，上式两边乘以e^{-t}然后逐项积分得到

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-1)^n, \quad c_n=\frac{1}{n!}\int_a^b e^{-t}(\log t)^n dt.$$

$F(z)$是一个幂级数的和，而这个幂级数对于任意的z是收敛的，

所以$F(z)$是整函数.

将积分(50)分为两个积分

$$\Gamma(z)=\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt+\int_1^{+\infty}e^{-t}t^{z-1}dt, \tag{51}$$

记

$$\alpha(z)=\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt \quad (\operatorname{Re}z>0), \tag{52}$$

$$\beta(z)=\int_1^{+\infty}e^{-t}t^{z-1}dt \quad (\operatorname{Re}z>0). \tag{53}$$

对于$\beta(z)$，我们有

$$\beta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z), \quad u_n(z)=\int_n^{n+1}e^{-t}t^{z-1}dt.$$

根据上面的结果，$u_n(z)$是一整函数. 又当$\operatorname{Re}z\leqslant x_0$时，

$$|u_n(z)|\leqslant\int_n^{n+1}e^{-t}t^{x-1}dt\leqslant\int_n^{n+1}e^{-t}t^{x_0-1}dt,$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}e^{-t}t^{x_0-1}dt=\int_1^{\infty}e^{-t}t^{x_0-1}dt$$

收敛. 由M-判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)$在半平面$\operatorname{Re}z\leqslant x_0$一致收敛. 由Weierstrass定理，$\beta(z)$在半平面$\operatorname{Re}z<x_0$内解析. 因为$x_0$是任意的，所以$\beta(z)$是整函数.

再来看$\alpha(z)$. 设

$$v_n(z)=\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}e^{-t}t^{z-1}dt.$$

同样，$v_n(z)$是整函数.

$$\alpha(z)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(z).$$

因为当$\mathrm{Re}z>x_0>0$时，

$$|v_n(z)|\leqslant\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}e^{-t}t^{x-1}dt\leqslant\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}e^{-t}t^{x_0-1}dt,$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}e^{-t}t^{x_0-1}dt=\int_0^1 e^{-t}t^{x_0-1}dt$$

收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n(z)$在 $\mathrm{Re}z>x_0>0$ 一致收敛，$\alpha(z)$ 在半平面 $\mathrm{Re}z>x_0$解析．因为x_0是任意正数，所以$\alpha(z)$ 在半平面 $\mathrm{Re}z>0$ 内解析．总之，

$$\Gamma(z)=\alpha(z)+\beta(z), \tag{54}$$

其中$\alpha(z)$在半平面$\mathrm{Re}z>0$内解析，$\beta(z)$是一整函数．

下面我们证明$\alpha(z)$可以展为函数项级数．由于级数

$$e^{-t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}t^n$$

在$0<a\leqslant t\leqslant 1$上一致收敛，因子$|t^{z-1}|=t^{x-1}$在$a\leqslant t\leqslant 1$上有界，所以

$$e^{-t}t^{z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}t^{n+z-1}$$

在$a\leqslant t\leqslant 1$上一致收敛，上式可以在$[a,1]$上逐项积分

$$\int_a^1 e^{-t}t^{z-1}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_a^1 t^{n+z-1}\,dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{z+n}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^a t^{n+z-1}\ dt.$$

但是

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^a t^{n+z-1}\ dt\right|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{n+x}}{n!(n+x)}$$

$$\leqslant a^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}=a^x e^a\to 0\ \ (a\to 0).$$

所以

$$a(z)=\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+z)} \tag{55}$$

在半平面$\mathrm{Re}z>0$成立．右边的级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+z)} \tag{56}$$

确定一个亚纯函数，它以$z=0,-1,-2,\cdots$为极点．事实上，任意给定正数R，取正整数$N\geqslant 2R$，将级数(56)分成两部分

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{n!(n+z)}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+z)}.$$

当$|z|<R$，$n>N$时，

$$\left|\frac{(-1)^n}{n!(n+z)}\right|\leqslant\frac{1}{n!(n-|z|)}\leqslant\frac{1}{n!(n-R)}$$

$$\leqslant\frac{1}{R\cdot n!}.$$

因此，$\sum\limits_{N+1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+z)}$在圆$|z|<R$内一致收敛，其和函数$\varphi_R(z)$在圆$|z|<R$内解析．而$\sum\limits_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{n!(n+z)}$是亚纯函数，它以$z=-n$

$(n=0,1,2,\cdots,N)$为一级极点，其留数为$\frac{(-1)^n}{n!}$. 于是

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{n!(n+z)}+\varphi_R(z)$$

是圆$|z|<R$内的亚纯函数，位于圆$|z|<R$内的负整数是它的极点，且没有别的极点. 因为R是任意的，所以级数(56)确定一个亚纯函数，它以$z=-n$ $(n=0,1,2,\cdots)$为一级极点. 根据这一事实，我们现在可以将$\Gamma(z)$的定义范围扩充为

$$\Gamma(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+z)}+\beta(z), \tag{57}$$

其中$\beta(z)$是由(53)式给定的整函数.

定义范围扩充后的$\Gamma(z)$是一个亚纯函数. (57)是它的部分分式，$z=-n$ $(n=0,1,2,\cdots)$是它的(一级)极点，且

$$\operatorname{Res}(\Gamma(z),-n)=\frac{(-1)^n}{n!}. \tag{58}$$

由(55)式，在右半平面$\operatorname{Re}z>0$内，$\Gamma(z)$的定义(57)式与原有积分定义(50)式是一致的.

2. Gauss公式与Weierstrass公式

设

$$f_n(z)=\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt,\ \operatorname{Re}z>0.$$

作变换$x=\frac{t}{n}$，并分部积分n次就得到

$$f_n(z)=n^z\int_0^1(1-x)^n x^{z-1}dx=\frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}. \tag{59}$$

另一方面，我们证明

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(z)=\Gamma(z), \qquad \mathrm{Re}\,z>0. \tag{60}$$

因为当$\mathrm{Re}\,z>0$时，有

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n e^{-t}t^{z-1}dt=\Gamma(z).$$

所以要证明(60)式，只需证明，当$\mathrm{Re}\,z>0$时，有

$$\lim_{n\to+\infty}\left\{\int_0^n e^{-t}t^{z-1}dt-\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt\right\}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\int_0^n e^{-t}t^{z-1}\left\{1-e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right\}dt=0.$$

为此，我们先证明以下不等式：当$0\leqslant t\leqslant n$时，

$$0\leqslant 1-e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leqslant\frac{t^2}{n}. \tag{61}$$

事实上，当$x\geqslant0$时，$1+x\leqslant e^x$，$1-x\leqslant e^{-x}$，所以

$$1+\frac{t}{n}\leqslant e^{\frac{t}{n}}, \quad 1-\frac{t}{n}\leqslant e^{-\frac{t}{n}},$$

即

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\leqslant e^t, \quad \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leqslant e^{-t}.$$

于是

$$0\leqslant e^t\left\{e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right\}=1-e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$$

$$\leqslant 1-\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n=1-\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n.$$

由Bernoulli不等式，

$$\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n\geqslant 1-\frac{t^2}{n}.$$

因此得到

$$0\leqslant 1-e^{t}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}\leqslant\frac{t^{2}}{n}.$$

现在我们有

$$\left|\int_{0}^{n}e^{-t}t^{z-1}\left\{1-e^{t}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}\right\}dt\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\int_{0}^{n}e^{-t}t^{x+1}dt\leqslant\frac{1}{n}\Gamma(x+2).$$

因此

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{0}^{n}e^{-t}t^{z-1}\left\{1-e^{t}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}\right\}dt=0.$$

由(59),(60)式得到，当$\mathrm{Re}z>0$时，

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n!n^{z}}{z(z+1)\cdots(z+n)}. \tag{62}$$

由于

$$\frac{n!n^{z}}{z(z+1)\cdots(z+n)}=\frac{e^{z\log n}}{z\left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right)}$$

$$=\frac{e^{z\log n}}{z\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{z}{m}\right)}=\frac{\exp\left\{z\left(\log n-\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right)\right\}}{z\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{z}{m}\right)e^{-\frac{z}{m}}}$$

以及Euler公式

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}-\log n\right)=C$$

(C称为Euler常数，$C=0.577\cdots$)，所以当$\mathrm{Re}z>0$时，

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!\,n^z}$$

$$= e^{Cz} z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}.$$

容易验证

$$e^{Cz} z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$$

表示一个整函数$\varphi(z)$(见§1的习题12)，它恰以$z=-n$ ($n=0$, $1,2,\cdots$)为零点．因此

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!\,n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} = \frac{1}{\varphi(z)}, \qquad z\neq 0,-1,-2,\cdots.$$

由唯一性定理，对于所有的$z\neq 0,-1,-2,\cdots$，等式

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\,n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} \tag{63}$$

成立．(63)式称为Gauss公式．

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{Cz} z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}} \tag{64}$$

称为Weierstrass公式．由这一公式立即看出

$$\Gamma(z)\neq 0.$$

从Gauss公式及Weierstrass公式可以得到下面两个重要公式．

首先，由Gauss公式(63)，有

$$\Gamma(z+1) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{z+1}n!}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n+1)}$$

$$= z\lim_{n\to+\infty} \frac{n!\,n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}\cdot\frac{n}{z+n+1},$$

所以

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z). \tag{65}$$

特别地，当$z=n$时，得到

$$\Gamma(n+1)=n!, \tag{66}$$

因为由(50)式$\Gamma(1)=1$.其次，由Weierstrass公式(64)，有

$$\frac{1}{\Gamma(-z)}=-e^{-Cz}z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}},$$

所以

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(-z)}=-z^2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right).$$

由(65)式，$\Gamma(1-z)=-z\Gamma(-z)$，以及

$$z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)=\frac{\sin\pi z}{\pi},$$

我们得到余元公式

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}. \tag{67}$$

特别地，若令 $z=1/2$，那么得到 $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$. 另一方面，由(50)式，有

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt=2\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx,$$

所以我们再次得到

$$\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

3. Stirling公式

现在我们来讨论当$z\to\infty$时，$\Gamma(z)$的渐近性质. 设$[x]$是不超过 x 的最大整数，$p_1(x)=x-[x]-1/2$. 计算积分

$$\int_1^n \frac{p_1(x)}{x}dx = \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{x-k-\frac{1}{2}}{x}dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\left\{1-\left(k+\frac{1}{2}\right)[\log(k+1)-\log k]\right\}$$

$$= (n-1)+\sum_{k=1}^{n-1}\log k-\left(n-\frac{1}{2}\right)\log n.$$

由此我们得到

$$\log n! = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-(n-1)+\int_1^n \frac{p_1(x)}{x}dx.$$

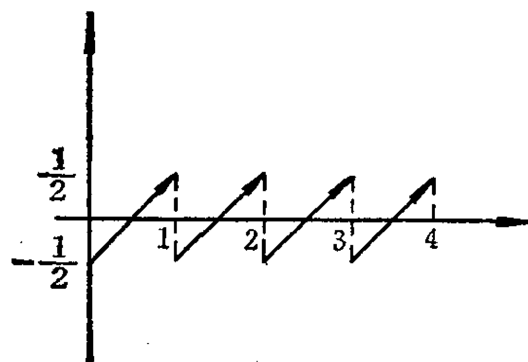


图 6-3

设

$$p_2(x) = \int_1^x p_1(t)\,dt.$$

显然$p_2(x)$是有界的(图6-3)，$|p_2(x)|\leqslant 1, p_2'(x)=p_1(x)$.

$$\int_1^n \frac{p_1(x)}{x}dx = \int_1^n \frac{dp_2(x)}{x}$$

$$= \frac{p_2(x)}{x}\Big|_1^n+\int_1^n \frac{p_2(x)}{x^2}dx.$$

由此看出，$\int_1^\infty \frac{p_1(x)}{x}dx$收敛，所以

$$\log n! = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+c_n,$$

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = c$$

存在(有穷)．下面我们求出 c 的值．如果我们在上式中易 n 为 $2n+1$，那么

$$\log(2n+1)! = \log(2n)!! + \log(2n+1)!!$$

$$= \left(2n+\frac{3}{2}\right)\log(2n+1) - (2n+1) + c_{2n+1}.$$

另一方面

$$\log(2n)!! = \log(2^n n!) = n\log 2 + \log n!$$

$$= \frac{1}{2}(2n+1)\log(2n) - n - \frac{1}{2}\log 2 + c_n.$$

由此二式得到

$$\log\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

$$= (2n+1)\log\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\log(2n+1) + 1 - \log 2 + 2c_n - c_{2n+1},$$

即

$$\log\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{2n+1}}$$

$$= (2n+1)\log\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) + 1 - \log 2 + 2c_n - c_{2n+1}.$$

由Wallis公式：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{[(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2(2n+1)} = \dfrac{\pi}{2}$（§1习题10），

得到

$$\frac{1}{2}\log\frac{\pi}{2} = -\log 2 + c, \quad c = \frac{1}{2}\log 2\pi.$$

因此

$$\log n! = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + \frac{1}{2}\log 2\pi - \int_n^\infty \frac{p_1(x)}{x}dx.$$

由分部积分，我们不难看出$\int_n^\infty \frac{p_1(x)}{x}dx = O\left(\frac{1}{n}\right)$，所以

$$\log n! = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + \frac{1}{2}\log 2\pi + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (68)$$

现在设$\pi-\delta\leqslant \arg z\leqslant \pi+\delta$ ($\delta>0$)，计算积分

$$-\int_0^n \frac{p_1(x)}{x+z}dx = \int_0^n \frac{[x]-x+\frac{1}{2}}{x+z}dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}\left(\frac{k+(1/2)+z}{x+z}-1\right)dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left\{\left(k+\frac{1}{2}+z\right)\log\left(1+\frac{1}{k+z}\right)-1\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}+z\right)[\log(k+z+1)-\log(k+z)]-n$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(k+z-\frac{1}{2}\right)\log(k+z)$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}\left(k+z+\frac{1}{2}\right)\log(k+z)-n$$

$$= -\sum_{k=0}^{n}\log(z+k)-\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z$$

$$+\left(n+z+\frac{1}{2}\right)\log(z+n)-n$$

$$= \log\frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}-\log n!-z\log n$$

$$-\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z+\left(z+n+\frac{1}{2}\right)\log(n+z)-n.$$

因此由(68)式得到

$$\log\frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} = -\left(n+z+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{z}{n}\right)$$

$$+\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z+\frac{1}{2}\log 2\pi$$

$$-\int_0^n \frac{p_1(x)}{x+z}dx + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

令$n\to+\infty$，由Gauss公式(63)得到

$$\log\Gamma(z) = \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z - z + \frac{1}{2}\log 2\pi$$

$$-\int_0^{+\infty} \frac{p_1(x)}{x+z}dx. \tag{69}$$

设

$$J(z) = \int_0^{+\infty} \frac{p_1(x)}{x+z}dx.$$

由分部积分得到

$$J(z) = \int_0^{\infty} \frac{p_2(x)}{(x+z)^2}dx.$$

因为 $|p_2(x)| \leqslant 1$，所以

$$|J(z)| \leqslant \int_0^{\infty} \frac{1}{|x+z|^2}dx.$$

在积分$\int_0^{\infty}\frac{1}{|x+z|^2}dx$ 中作变换 $t=|z|x$ 得到

$$|J(z)| \leqslant \int_0^{\infty} \frac{dt}{|z|\left|t+\frac{z}{|z|}\right|^2},$$

其中$\left|t+\frac{z}{|z|}\right|$表示单位圆周上点$\frac{z}{|z|}$ $(|\arg z| \leqslant \pi-\delta)$ 到点$-t$的距离，从图6-4上看出，

$$\left|t+\frac{z}{|z|}\right| \geqslant |t+e^{(\pi-\delta)i}| = |t-e^{-\delta i}| = t^2-2t\cos\delta+1.$$

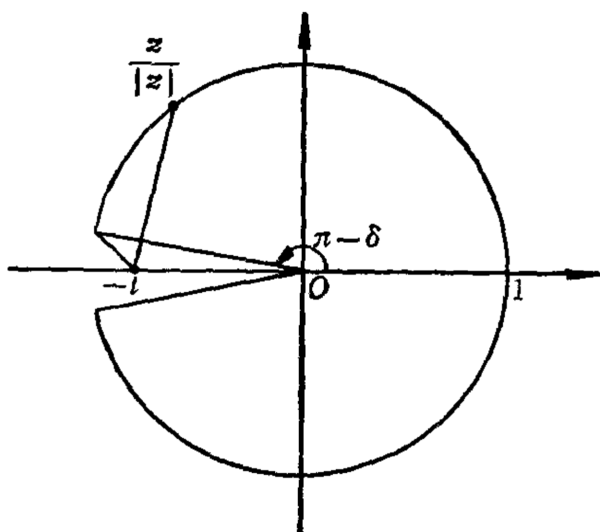


图 6-4

所以

$$|J(z)| \leqslant \frac{1}{|z|}$$

$$\times \int_{0}^{\infty} \frac{dt}{t^2 - 2t\cos\delta + 1}$$

$$= O\left(\frac{1}{|z|}\right).$$

最后得到

$$\log\Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\log z - z + \frac{1}{2}\log 2\pi$$

$$+ O\left(\frac{1}{|z|}\right), \tag{70}$$

其中O常数只与δ有关.(70)式称为Stirling公式.

习　　题

1. 证明:

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\frac{1}{z} - C + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n}\right),$$

$$\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)' = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}.$$

提示: 利用Weierstrass公式及§1定理1的推论1.

2. 设 $\psi(z) = \dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$, 求证

(1) $\psi(1) = -C$;

(2) $\psi(z+1) - \psi(z) = 1/z$;

(3) $\psi(z)-\psi(1-z)=-\pi\cot\pi z$.

3. 证明：若Re$z>0$，则

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right)dt.$$

提示：利用习题1.

4. 证明Legendre公式：

$$\Gamma(z)\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}}\Gamma(2z).$$

提示：考虑函数 $\Gamma(z)\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Big/\Gamma(2z)$并利用习题 1.

5. 证明：

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right)$$

$$=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}-nz}\Gamma(nz).$$

特别是，当 $z=\frac{1}{n}$时，有

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}.$$

提示：考虑函数$\dfrac{n^{nz}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right)}{n\Gamma(nz)}$，并利用Gauss公式.

6. 证明：

$$\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)=2^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^2.$$

7．证明：若$0<\mathrm{Re}z<1$，则

$$\int_0^\infty e^{-it}t^{z-1}dt=\Gamma(z)e^{-\frac{\pi i}{2}z}.$$

提示：考虑$e^{-\zeta}\zeta^{z-1}$在图6-5所示路径上的积分。

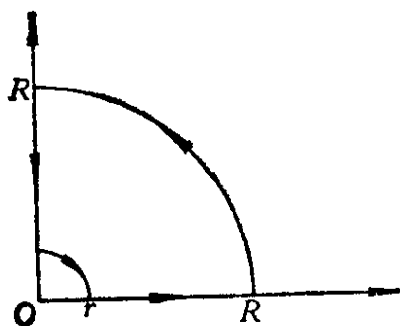


图 6-5

8．设 $u(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)\times\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-1$，证明：

(1) $0<u(x)<\frac{1}{12x(x+1)}$;

(2) $0<J(x)=\int_0^\infty\frac{[t]-t+\frac{1}{2}}{t+x}dt<\frac{1}{12x}\quad(x>0)$;

(3) $\Gamma(x)=\sqrt{2\pi}\ x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}e^{\frac{\theta(x)}{12x}}$, $x>0$, $0<\theta(x)<1$.

第七章　解析开拓

§1　幂级数的解析开拓

1. 解析开拓的一般概念

设函数$f(z)$在域D内解析．考虑一个包含D的较大的域G（图7-1）．如果能够找到一个函数$F(z)$，它在G内解析，且在D内$F(z)=f(z)$，那么我们称函数$f(z)$可以解析开拓到$G-D$．由解析函数的唯一性定理，在域G内如果函数$F(z)$存在，那么一定是唯一的．解析开拓的例子在第六章§3讨论Γ函数时已经遇到过，在那里我们曾经将$\alpha(z)$解析开拓到除去点$z=-n(n=0,1,2,\cdots)$外的左半平面$\mathrm{Re}z<0$．

现在考虑两个函数$f_1(z)$，$f_2(z)$，分别在域D_1及D_2内解析，且D_1与D_2的交是域d（图7-2）．在d内，$f_1(z)=f_2(z)$，那么显然在域$D=D_1\cup D_2$内确定的函数

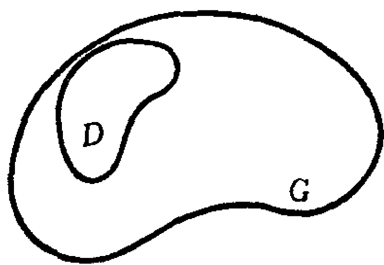


图 7-1

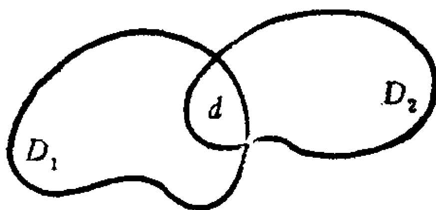


图 7-2

$$f(z)=\begin{cases}f_1(z), & z\in D_1;\\ f_2(z), & z\in D_2\end{cases}$$

是解析的．我们称$f_1(z)$，$f_2(z)$是互为解析开拓．

2. 幂级数的解析开拓

解析函数的开拓(如果它能够开拓)，其方法是随着具体的函数而多种多样的．下面叙述幂级数的解析开拓，它在理论上有重要意义．设幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n \tag{1}$$

的收敛半径是R，$0<R<+\infty$，我们知道它的和函数$f(z)$在收敛圆D：$|z|<R$内是解析的．

今设$O\zeta_0$是D内的一条半径，$z_0\neq 0$是$O\zeta_0$上的一点，$f(z)$在z_0的邻域内可展为Taylor级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n, \tag{2}$$

其收敛半径为ρ．显然$\rho\geqslant R-|z_0|$，因此只可能出现以下两种情形：

1) $\rho>R-|z_0|$．这时幂级数(2)的收敛圆D_1：$|z-z_0|<\rho$内有一部分在D的外部．如果设$g(z)$为级数(2)在D_1内的和函数，那么当$z\in D_1\cap D$时，$g(z)=f(z)$，所以$f(z)$解析开拓到$D_1-D_1\cap D$（即图7-3带阴影的那部分)，我们称$f(z)$可以沿半径$O\zeta_0$解析开拓，$g(z)$是$f(z)$的直接解析开拓．

2) $\rho=R-|z_0|$．这时，幂级数(2)的收敛圆D_1在D内，圆周$|z-z_0|=\rho$与圆周$|z|=R$相切于ζ_0（图7-4)．容易看出，在ζ_0的任意邻域$V(\zeta_0;\ \delta)$内不存在一个解析函数$g(z)$，使得在$V(\zeta_0;\ \delta)\cap D$内，$g(z)=f(z)$．因此$f(z)$不可能沿$O\zeta_0$解析开拓到$D$外去．我们称$\zeta_0$是$f(z)$的一个奇点．

现在，自然会提出这样一个问题：$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$是否沿收敛圆的每一个半径都可以解析开拓呢？回答是否定的．也就是

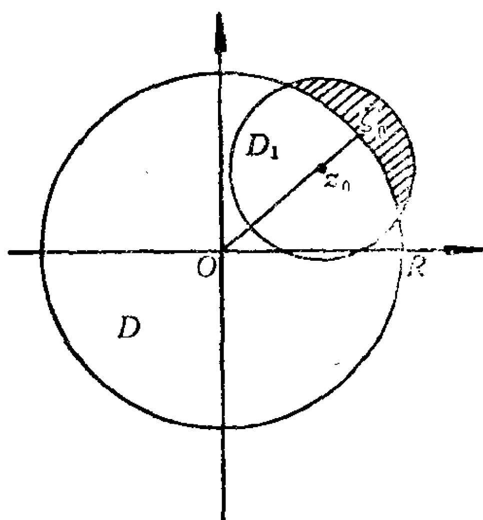


图 7-3

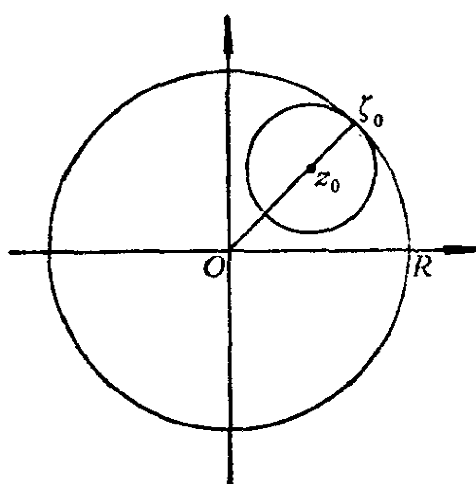


图 7-4

说，$f(z)$至少沿某一个半径不能解析开拓.

定理1 在幂级数(1)的收敛圆周$|z|=R$上至少有$f(z)$的一个奇点.

证明 用反证法．若不然，则在收敛圆周$|z|=R$上的每一个点ζ，存在以ζ为中心的圆D_ζ与函数$g_\zeta(z)$，使得$g_\zeta(z)$在D_ζ内解析，在$D_\zeta\cap D$内，$g_\zeta(z)=f(z)$.显然圆族$\{D_\zeta\}$构成$|z|=R$的一个开覆盖，圆周$|z|=R$是紧集，所以在$\{D_\zeta\}$中有有穷多个开圆D_{ζ_1}，D_{ζ_2}，…，D_{ζ_m}，它们完全覆盖圆周$|z|=R$．设

$$G=\bigcup_{k=1}^{m} D_{\zeta_k},$$

ρ（>0）是$|z|=R$到G的边界的距离，那么圆环$R-\rho<|z|<R+\rho$属于G．在G内定义函数

$$\Phi(z)=g_{\zeta_k}(z),\quad z\in D_{\zeta_k}\ (k=1,2,\cdots,m).$$

$\Phi(z)$是G内的单值解析函数，这是因为，如果$D_{\zeta_k}\cap D_{\zeta_l}$非空，那么$(D_{\zeta_k}\cap D_{\zeta_l})\cap D$也非空(图7-5)，并且在这部分

$$g_{\zeta_k}(z)=g_{\zeta_l}(z)=f(z).$$

所以由唯一性定理，在$D_{\zeta_k}\cap D_{\zeta_l}$，

$$g_{\zeta_k}(z)=g_{\zeta_l}(z).$$

图 7-5

根据同样的理由，在$G\cap D$，

$$\Phi(z)=f(z).$$

因此$f(z)$解析开拓到域$G\cup D$，而这个域内显然包含圆$|z|<R+\rho$，$f(z)$在$|z|<R+\rho$内可展成幂级数（它的Taylor级数），由展式的唯一性，这只能是幂级数(1)．但这是不可能的，因为(1)的收敛半径是R．定理证毕．

例1 设函数$f(z)$由几何级数给定

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n. \tag{3}$$

这个级数在单位圆D：$|z|<1$内收敛到解析函数$f(z)=\dfrac{1}{1-z}$．

在D：$|z|<1$的外部，级数(3)处处发散．在圆$|z|<1$内取z_1(图7-6)，由于

$$f^{(n)}(z_1)=\frac{n!}{(1-z_1)^{n+1}},\quad n=0,1,2,\cdots,$$

所以$f(z)$在z_1的邻域内可展为幂级数

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-z_1)^{n+1}}(z-z_1)^n. \tag{4}$$

这个级数的收敛半径是$|1-z_1|$，它的和函数$f_1(z)$在D_1：$|z-z_1|<|1-z_1|$内解析．$f_1(z)$是$f(z)$在D_1内的直接解析开拓．当$z\in D\cap D_1$时，$f_1(z)=f(z)$．易见级数(4)的和函数

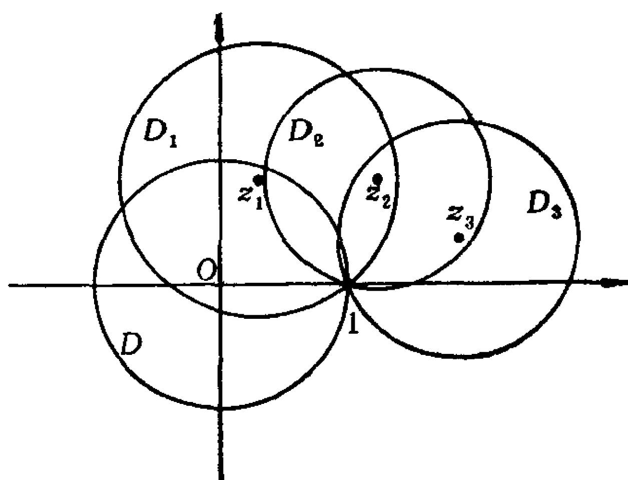


图 7-6

$$f_1(z)=\frac{1}{1-z_1}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_1}{1-z_1}}=\frac{1}{1-z},\quad |z-z_1|<|1-z_1|.$$

同样，在D_1内取一点z_2，在z_2的邻域内，$f_1(z)$可展为幂级数

$$f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-z_2)^{n+1}}(z-z_2)^n. \tag{5}$$

它的收敛半径为$|1-z_2|$，和函数$f_2(z)$在D_2：$|z-z_2|<|1-z_2|$内解析．$f_2(z)$是$f_1(z)$在D_2内的直接解析开拓．在D_2内，$f_2(z)=1/(1-z)$．如此等等．我们从D：$|z|<1$内给定的函数$f(z)$，用幂级数进行解析开拓，得到函数$F(z)=1/(1-z)$，它在全平面除去点$z=1$外是解析的，点$z=1$是$F(z)$的唯一的奇点．

例 2 研究幂级数

$$f(z)=z^{1!}+z^{2!}+z^{3!}+\cdots+z^{n!}+\cdots. \tag{6}$$

因为

$$c_n=\begin{cases}1, & 若 n=k!;\\ 0, & 若 n\neq k!.\end{cases}$$

所以$\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}=1$，故级数(6)的收敛半径$R=1$．它的收敛圆是单位圆$|z|<1$，和函数$f(z)$在圆$|z|<1$内解析．下面证明单

位圆周$|z|=1$上的每一点都是$f(z)$的奇点.

考虑以原点为中心，1/2为半径的圆周$|z|=1/2$. z_0是这个圆周上的任意一点. 若能证明幂级数

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \qquad (7)$$

的收敛半径为1/2，那么延长Oz_0与圆周$|z|=1$的交点ζ_0，按定义就是$f(z)$的一个奇点. 假如级数 (7) 的收敛半径大于1/2，那么ζ_0是(7)的收敛圆D内的一个内点，所以在圆周$|z|=1$上存在一段圆弧σ，使得$\zeta_0\in\sigma\subset D$. 由于形如$e^{2\pi ip/q}$ (p,q是整数，p/q是既约分数）的点在圆周$|z|=1$上是处处稠密的，所以在σ上存在一点$\zeta_1=e^{2\pi ip/q}$

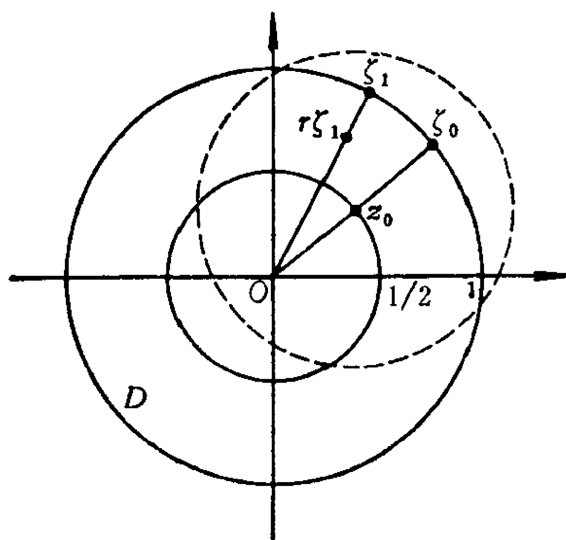


图 7-7

(图7-7)，

$$\lim_{r\to1}g(r\zeta_1)=g(\zeta_1) \quad (0<r<1).$$

但是当$z\in D$且$|z|<1$时，

$$g(z)=f(z).$$

所以

$$\lim_{r\to1}f(r\zeta_1)=g(\zeta_1). \qquad (8)$$

另一方面，我们有

$$f(r\zeta_1)=\sum_{n=1}^{q-1}r^{n!}\zeta_1^{n!}+\varphi(r),$$

其中

$$\varphi(r)=\sum_{n=q}^{\infty} r^{n!}.$$

容易看出．$\varphi(r)$是r的增函数$(0<r<1)$，且$\lim\limits_{r\to 1}\varphi(r)=+\infty$，因为对于任意大的正整数$N$，

$$\varphi(r)>\sum_{n=q}^{N} r^{n!}>(N-q)r^{N!}.$$

所以$\lim\limits_{r\to 1}|f(r\zeta_1)|=+\infty$，这与(8)式矛盾．故$\zeta_0$是$f(z)$的奇点．

3．完全解析函数．单值性定理

考虑一幂级数

$$P(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \tag{9}$$

其收敛半径为R，$0<R<+\infty$，我们称这个幂级数为一个解析元素．若a_1是这个幂级数收敛圆内的一点，则幂级数

$$P_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P^{(n)}(a_1)}{n!}(z-a_1)^n$$

的收敛半径$R_1\geqslant R-|a_1-a|>0$，它也是一解析元素．我们称这个解析元素$P_1(z)$为解析元素$P(z)$的一个直接开拓．

现在设有m个解析元素

$$P_k(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n^{(k)}(z-a_k)^n\ \ (k=1,2,\cdots,m). \tag{10}$$

如果$P_1(z)$是$P(z)$的直接开拓，$P_2(z)$是$P_1(z)$的直接开拓…，$P_m(z)$是$P_{m-1}(z)$的直接开拓，则称$P_m(z)$是$P(z)$的一个解析开拓．

一个解析元素$P(z)$的全部解析开拓形成一个集，这个集称为由解析元素$P(z)$所产生的完全解析函数．一般说来，它是一个多值函数．在开拓的过程中，经过一串解析元素开拓后，新的收敛圆与原来解析元素的收敛圆重叠起来或部分地重叠起来，如图 7-8 中，第五个解析元素的收敛圆和第一个解析元素的收敛圆有公共的阴影部分．在这部分新的解析元素和原来的解析元素的值可能相同．如前面的例 1，这时开拓后的函数是单值的；新的解析元素与原来解析元素的值也可能不同，这时开拓后的函数是多值的．$P(z)$的全部解析开拓所对应的收敛圆的和，称为这个完全解析函数的存在域，其边界称为它的自然边界．一个完全解析函数的存在域显然是最大的，而不可能再开拓出去．因此，存在域的每个边界点都是完全解析函数的奇点，即自然边界是由该完全解析函数的全部奇点所组成．比如，例 2 中的函数 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ 的自然边界是单位圆周$|z|=1$.

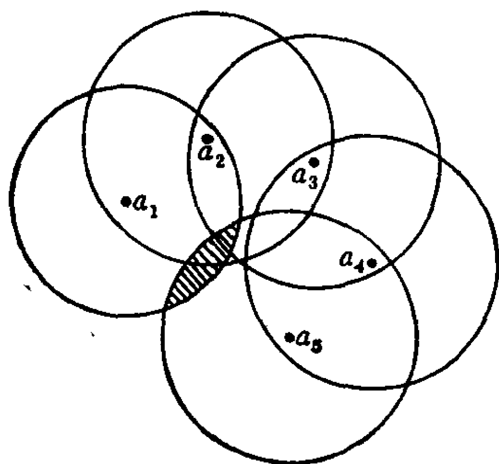


图 7-8

以下我们考虑一个解析元素

$$P(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad |z-a|<R,$$

沿曲线γ的解析开拓．设γ是以a,b为端点的曲线，为简便起见，我们称为由a点出发的曲线．我们说$P(z)$可以沿曲线γ解析开拓，如果可以得到γ上的一串点（图7-9）

$$a_0=a, a_1, a_2, \cdots, a_m=b$$

和相应的一串解析元素

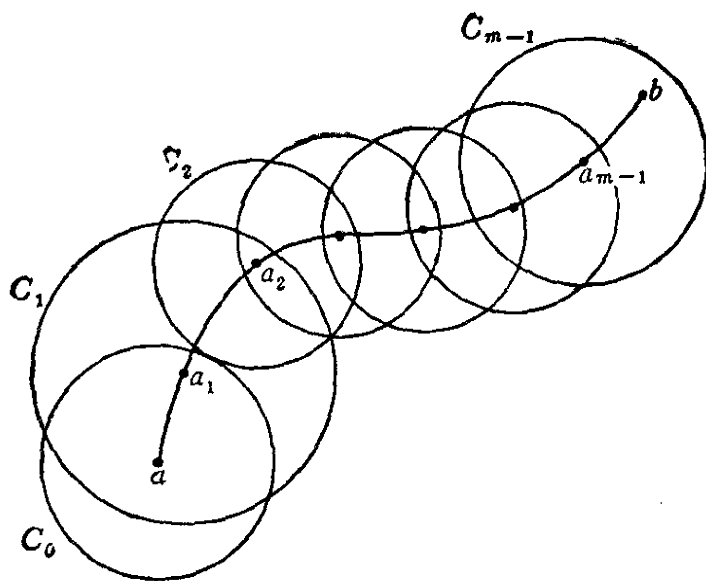


图 7-9

$$P_k(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(k)}(z-a_k)^n \quad (k=0,1,2,\cdots,m-1),$$

$$P_0(z)=P(z),$$

它们满足下面的条件

1）曲线弧$\widehat{a_k a_{k+1}}$位于$P_k(z)$的收敛圆C_k内（$k=0,1,2,\cdots,m-1$）；

2）$P_k(z)$是$P_{k-1}(z)$的直接解析开拓（$k=1,2,\cdots,m-1$）.

设给定一个解析元素 $P(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$，其收敛圆为$|z-a|<R$，$D$是包含$a$的一个域．对于域$D$的另一点$b$，如果$P(z)$沿$D$内由$a$到$b$的两条曲线$\gamma_1,\gamma_2$可以解析开拓，一般说来，在$b$点的值不相同．比如

$$\log z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n,\quad |z-1|<1,$$

沿图7-10所示的曲线γ_1,γ_2解析开拓到b点，得到的值相差$2\pi i$，这

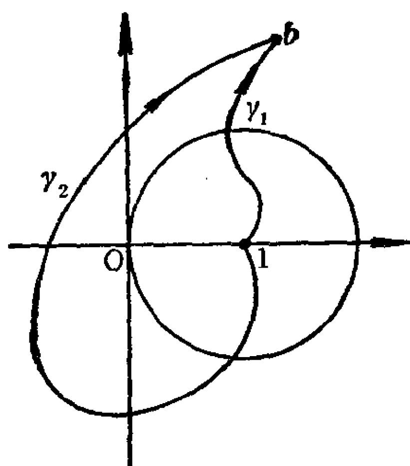


图 7-10

里我们是把D作为去掉原点的某一个域，γ_1,γ_2是D内的曲线．但是，如果D是不含点$z=0$的某一个单连通域，比如是去掉负实轴的有穷平面，那么沿D内的不同曲线解析开拓到D内的任意一点，其值是相同的，因而得到一个单值函数，这就是$\mathrm{Log}\, z$的一个单值解析分支．一般地，有下面的重要定理．

定理 2（单值性定理） 设D是一个单连通域，a是D内一点，

$$P(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{11}$$

是一解析元素．若$P(z)$可以沿D内由a点出发的任一曲线解析开拓，则存在一个D内解析函数$f(z)$，使得在a点的邻域内$f(z)=P(z)$．

证明 首先，D不可能是有穷复平面$\mathbb{C}$，因为$P(z)$的收敛圆周上必有$P(z)$的一个奇点z_0（定理 1），$P(z)$不能沿半径$\overline{az_0}$解析开拓，所以线段$\overline{az_0}$不能完全属于D．

由下一章的 Riemann 定理，存在一个D内的单叶解析函数$w=\varphi(z)$，把D映为单位圆K：$|w|<1$，且$\varphi(a)=0$．它的反函数$z=\psi(w)$在K内单叶解析，把K映为D，且$\psi(0)=a$．根据$\psi(w)$的连续性，存在以点$w=0$为圆心的小圆k（图7-11），使得当$w\in k$时，$\psi(w)$位于$P(z)$的收敛圆C_0内，函数$P\{\psi(w)\}$在k内解析，可以展为幂级数

$$P\{\psi(w)\}=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n w^n. \tag{12}$$

设左边的幂级数的收敛圆为k'，和函数

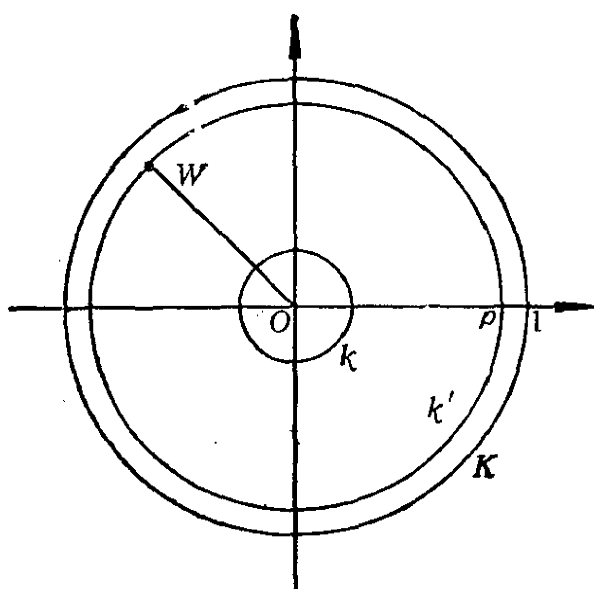


图 7-11

$$g(w)=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n w^n \quad (13)$$

在 k' 内解析，且在 k 内

$$g(w)=P\{\psi(w)\}. \quad (14)$$

如果我们能够证明k'的半径$\rho\geqslant 1$，那么我们就证明了定理 2．事实上，这时$g(w)$在圆$|w|<1$内解析，$g\{\varphi(z)\}$在D内解析，且若 z 在 a 点的邻域内，则$w=\varphi(z)\in k$，由（14）式，在 a点的邻域内，有

$$g(\varphi(z))=P(z).$$

于是$f(z)=g(\varphi(z))$就满足定理 2 的要求．

现在来证明$\rho\geqslant 1$．假如$\rho<1$，由定理 1，$g(w)$在圆周$|w|=\rho$上至少有一个奇点W．半径$\overline{OW}$在映照$\psi(w)$下的象是由a到$b=\psi(W)$的曲线γ．按照定理 2 的条件，$P(z)$可沿γ解析开拓，所以可得到γ上的一串点$a_0=a,a_1,a_2,\cdots,a_n=b$，和相应的一串解析元素$P_0(z)=P(z),P_1(z),\cdots,P_{n-1}(z)$满足条件1)与2)．设$C_k$是$P_k(z)$的收敛圆，$\overline{OW}$上与$a_k$相应的点是$w_k(k=0,1,2,\cdots,n,w_0=0,w_n=W)$，

$$a_k=\psi(w_k).$$

线段$\overline{w_k w_{k+1}}$在映照$\psi(w)$下的象是曲线弧$\widehat{a_k a_{k+1}}$．

我们首先证明在线段$\overline{Ow_1}$上(14)式成立．我们已知(14)式在k内成立，所以在线段$\overline{Ow_1}$上存在一点w'，位于O,w_1之间，使得在线段$\overline{Ow'}$上(14)式成立．但是$a'=\psi(w')$是C_0内的一点，所以由连续性可得到一个以w'为圆心的小圆σ，使得当w在σ内时，$z=\psi(w)$在C_0内，函数$P\{\psi(w)\}$在σ内解析．又因为(14)式在线

段$\overline{Ow'}$上成立，所以由唯一性定理，(14)式在σ内成立．于是在w'和w_1之间又可得到w''，使得(14)式在$\overline{Ow''}$上成立．由此可知，(14)式在线段$\overline{Ow_1}$上成立(图7-12)．

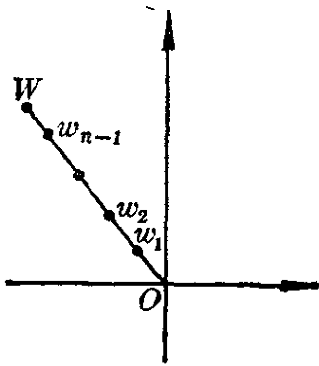


图 7-12

由于$a_1=\psi(w_1)$位于圆C_0内，并且是C_1的圆心，根据$\psi(w)$的连续性，可得到以w_1为圆心的小圆k_1，使得当w在k_1内时，$z=\psi(w)$位于圆C_0和圆C_1的公共部分．但是在此公共部分

$$P(z)=P_1(z).$$

所以在k_1内

$$P\{\psi(w)\}=P_1\{\psi(w)\}.$$

然后再根据(14)式（在$\overline{Ow_1}$上成立）及唯一性定理，等式

$$g(w)=P_1\{\psi(w)\} \tag{15}$$

在k_1内成立．并且按照上面同样的方法，可以证明(15)式在$\overline{w_1w_2}$上成立．如此继续下去，最后得到下面的等式

$$g(w)=P_{n-1}\{\psi(w)\} \tag{16}$$

在线段$\overline{w_{n-1}W}$上除去W外成立．

$b=\psi(W)$位于圆C_{n-1}内，由$\psi(w)$的连续性，可得到一个以W为圆心的小圆k_n，使得当$z\in k_n$时，$z=\psi(w)$在C_{n-1}内，函数$P_{n-1}\{\psi(w)\}$在k_n内解析．由(16)式及唯一性定理，在k_n和k'的公共部分，(16)式成立．但是W是$g(w)$的一个奇点，这就产生矛盾．因此$\rho\geqslant 1$．定理证毕．

习　题

1．求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n}$的和函数$f(z)$在点$z=-1/2$邻域内的Taylor展式．问$f(z)$由此可开拓到怎样的域内？

2. 证明由级数

$$1+az+a^2z^2+\cdots+a^nz^n+\cdots$$

与级数

$$\frac{1}{1-z}-\frac{(1-a)z}{(1-z)^2}+\frac{(1-a)^2z^2}{(1-z)^3}-\cdots$$

定义的函数互为解析开拓.

3. 证明：幂级数

$$f_1(z)=z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots+\frac{z^n}{n}+\cdots$$

与幂级数

$$f_2(z)=\pi i-(z-2)+\frac{1}{2}(z-2)^2-\frac{1}{3}(z-2)^3+\cdots$$

的收敛圆没有公共部分，但$f_1(z)$，$f_2(z)$互为解析开拓.

4. 定义在实轴上的实函数$f(x)=\sqrt{x^2}$ $(-\infty<x<+\infty)$能否解析开拓到复平面上?

5. 设函数$f(z)$在点$z=0$解析，且在点$z=0$的邻域内满足条件

$$f(2z)=2f(z)f'(z).$$

证明$f(z)$可以解析开拓到有穷复平面$\mathbf{C}$上.

6. 证明：如果$\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n=f(z)$的收敛圆周上至少有$f(z)$的一个极点，则幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$在收敛圆周$|z|=R$上处处发散.

提示：若z_1是收敛圆周$|z|=R$上使级数收敛的点，则当z沿半径趋于z_1时，$\lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z)=0$.

7. (Pringsheim定理) 如果$\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n=f(z)$的收敛半径

$R=1$，且$c_n\geqslant 0$，则$z=1$是$f(z)$的一个奇点.

8. 证明：幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{2^n}$ 都不能解析开拓到它们的收敛圆外.

9. 证明级数

$$\frac{1}{1-z}+\frac{z}{z^2-1}+\frac{z^2}{z^4-1}+\frac{z^4}{z^8-1}+\cdots$$

在$|z|<1$与$|z|>1$表示两个解析函数，它们不能互为解析开拓.

10. 证明：若 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在收敛圆周上只有一个奇点 z_0，且这个奇点是一级极点，则

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{c_n}{c_{n+1}}=z_0.$$

11. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$是收敛的正项级数，$\{x_n\}$是全体实的有理数序列，证明函数

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{z-x_n}$$

在上半平面与下半平面都是解析的，但不能互为解析开拓.

12. 设幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

的收敛半径$R=1$，作变换$z=\zeta/(1+\zeta)$得到

$$f(z)=f\left(\frac{\zeta}{1+\zeta}\right)=F(\zeta)=c_n\zeta^n,$$

其收敛半径为ρ. 证明

（1）$\rho\geqslant 1/2$. 如果$z=-1$是$f(z)$的奇点，则$\rho=1/2$；

(2) 若$\frac{1}{2}<\rho<1$，则$f(z)$可以解析开拓到圆周$|z|=1$的外部且在圆周$\left|\frac{z}{z-1}\right|=\rho$的内部的那部分；

(3) 若$\rho=1$，则$f(z)$可解析开拓到半平面$\mathrm{Re}\, z<1/2$；

(4) 若$\rho>1$，则$f(z)$可解析开拓到圆周$\left|\frac{z}{z-1}\right|=\rho$的外部；

(5) 若$\rho=+\infty$，则$f(z)$可以解析开拓到除去点$z=1$的整个平面上.

§2 函数越过边界的解析开拓．对称原理

1. Painlevé定理．对称原理

定理1 设D_1, D_2是两个沒有公共点的域，在它们的边界上有一段可求长的曲线γ是公共的（不包括端点在内）．若函数$f_1(z), f_2(z)$分别在D_1, D_2内解析，在$D_1\cup\gamma$和$D_2\cup\gamma$上连续，在γ上，$f_1(z)=f_2(z)$，则函数

$$f(z)=\begin{cases}f_1(z), & z\in D_1;\\ f_1(z)=f_2(z), & z\in\gamma;\\ f_2(z), & z\in D_2\end{cases}$$

在$D_1\cup D_2\cup\gamma$内解析．$f_1(z)$和$f_2(z)$称为越过边界γ互为解析开拓．这个定理称为Painlevé定理．

证明 由定理的条件知，$f(z)$在$D_1\cup D_2\cup\gamma$内是连续的，在D_1, D_2内是解析的．因此，只要证明$f(z)$在γ上是解析的．设z_0是γ上的任一点．作一圆C：$|z-z_0|<r$，使得$C\subset D=D_1\cup D_2\cup\gamma$，$l$是$C$内的任意一条可求长简单闭曲线（图7-13）．若$l$属于$D_1\cup\gamma$，

则由Cauchy定理，

$$\int_l f(z)dz = \int_l f_1(z)dz = 0;$$

若l属于$D_2\cup\gamma$，同理有

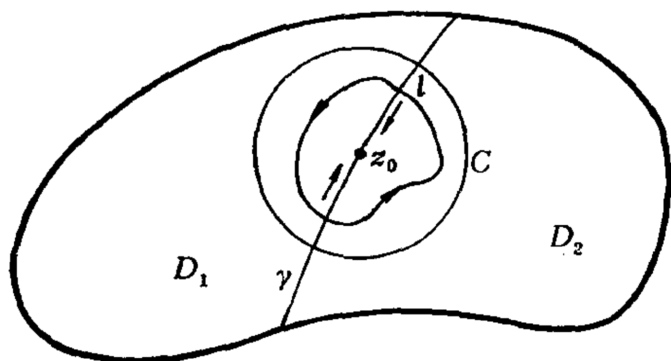


图 7-13

$$\int_l f(z)dz = 0;$$

若l同时属于D_1和D_2，设l_1是l属于D_1的那部分，l_2是l属于D_2的那部分．γ在l的内部的那部分记为l_0．l_1和l_0一起构成一简单闭曲线，l_2和l_0^{-1}一起也构成一简单闭曲线．由于$f_1(z)$，$f_2(z)$连续到γ，所以

$$\int_l f(z)dz = \int_{l_1+l_0} f_1(z)dz + \int_{l_2+l_0^{-1}} f_2(z)dz = 0.$$

由Morera定理，$f(z)$在圆$|z-z_0|<r$内解析．特别地，$f(z)$在z_0解析．因为z_0是γ上的任意一点，所以$f(z)$在D内解析．定理证毕．

当γ是一条直线段时，应用Painlevé定理，便得到下述对称原理．

定理 2 设域D位于实轴的同一侧，其边界包含实轴上的线段S（两端点不包括在内）．若函数$f(z)$满足条件：1) $f(z)$在D内解析，在$D\cup S$上连续；2) $f(z)$在S上取实值．则存在一函数$F(z)$，满足条件：

1) $F(z)$在$D\cup D'\cup S$内解析，并且在D内$F(z)=f(z)$，这里D'是D关于实轴对称的域；

2) $F(\bar{z})=\overline{F(z)}$．

证明 在域$D\cup D'\cup S$内定义函数

$$F(z)=\begin{cases} f(z), & z\in D\cup S; \\ \overline{f(\bar{z})}, & z\in D'. \end{cases}$$

这样定义的函数显然满足条件 2)，$F(\bar{z})=\overline{F(z)}$. 所以我们只要证明$F(z)$在$D\cup D'\cup S$内解析.

我们先证明$F(z)$在D'内解析 . 设z_0是D' 内的任意一点，z是z_0邻域内的一点，

$$\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}=\frac{\overline{f(\bar{z})}-\overline{f(\bar{z}_0)}}{z-z_0}=\overline{\left(\frac{f(\bar{z})-f(\bar{z}_0)}{\bar{z}-\bar{z}_0}\right)}.$$

所以

$$\lim_{z\to z_0}\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}=\overline{(f'(\bar{z}_0))}.$$

又由于$f(z)$在S上取实值，即$\overline{f(x_0)}=f(x_0)$，$x_0\in S$，所以当$z\in D'$时，

$$\lim_{\substack{z\to x_0\\ z\in D'}}F(z)=\lim_{z\to x_0}\overline{f(\bar{z})}=\overline{\lim_{z\to x_0}f(\bar{z})}$$

$$=\overline{f(x_0)}=f(x_0).$$

故$F(z)$在$D'\cup S$上连续.根据Painlevé定理，$F(z)$在$D\cup D'\cup S$内解析. 定理证毕.

对称原理表示$f(z)$可以越过S解析开拓到D关于实轴对称的域D'. 定理 2 还可以叙述为如下更一般的形式：

定理2′ 设域D位于直线 l 的同一侧，其边界包含 l上的某一线段 S（两端点不在内）. 若函数$f(z)$满足条件：1) $f(z)$在D内解析，在$D\cup S$上连续；2) $f(z)$在S上的值位于直线L上，则存在一函数$F_1(z)$满足条件

1） $F_1(z)$在$D\cup D'\cup S$内解析，在D内，$F_1(z)=f(z)$，这里D'是D关于l对称的域；

2） 若z_1, z_2是$D\cup D'\cup S$内关于l对称的两点，则$F_1(z_1)$，$F_1(z_2)$是关于L对称的两点．

证明 作变换$Z=az+b$，把直线l变为实轴，D和D'分别变为关于实轴对称的域G和G'，S变为实轴上的σ．作变换$W=cw+d$把直线L变为实轴（图7-14）．

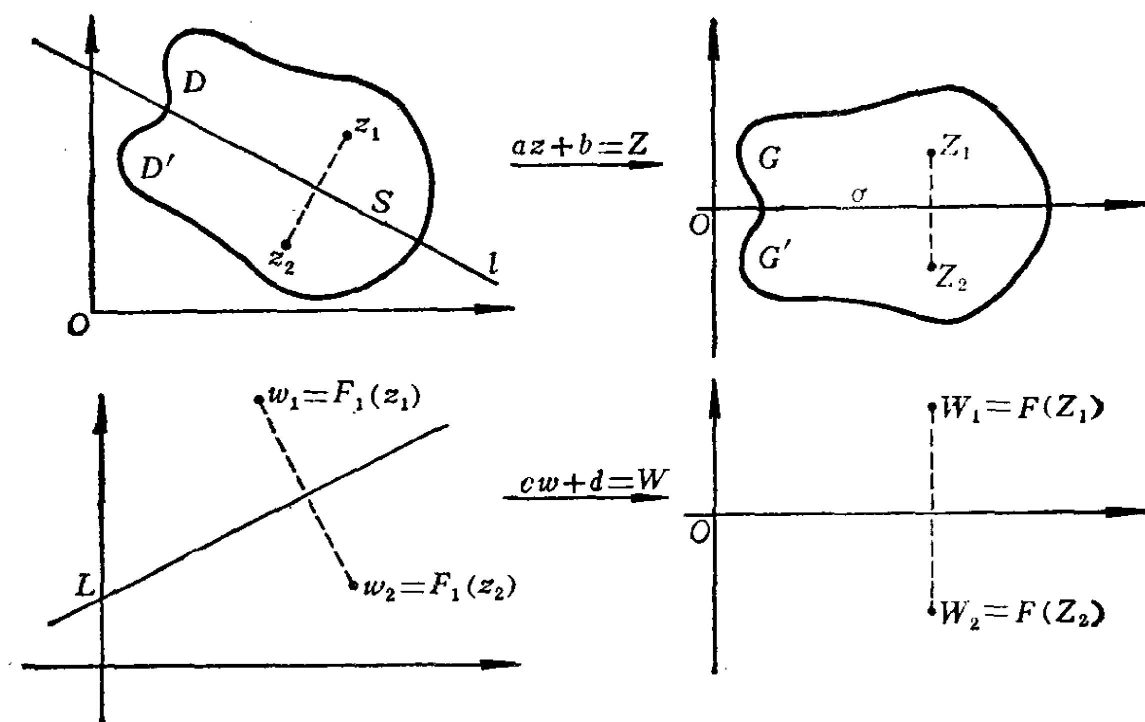


图 7-14

$Z=az+b$的逆变换是$z=\alpha Z+\beta$（$\alpha=\frac{1}{a}$，$\beta=-\frac{b}{a}$），于是函数

$$W=\Phi(Z)=cf(\alpha Z+\beta)+d$$

在G内解析，在$G\cup\sigma$上连续，在σ上取实值．由定理2，函数

$$F(Z)=\begin{cases}\Phi(Z), & z\in G\cup\sigma;\\ \overline{\Phi(\overline{Z})}, & z\in G'\end{cases}$$

在$G\cup G'\cup\sigma$内解析．在G内，$F(Z)=\Phi(Z)$，$F(\bar{Z})=\overline{F(Z)}$．于是函数

$$w=F_1(z)=\frac{1}{c}F(az+b)-\frac{d}{c}$$

就是我们所要求的．因为 1） 由于$F(Z)$在$G\cup G'\cup\sigma$内解析，所以$F(az+b)$在$D\cup D'\cup S$内解析，$F_1(z)$在$D\cup D'\cup S$内解析．并且当$z\in D$时，$Z=az+b\in G$，

$$w=F_1(z)=\frac{1}{c}F(az+b)-\frac{d}{c}=\frac{1}{c}\Phi(az+b)-\frac{d}{c}=f(z).$$

2） 若z_1,z_2是$D\cup D'\cup S$内关于l对称的两点，那么$Z_1=az_1+b$，$Z_2=az_2+b$是$G\cup G'\cup\sigma$内关于实轴对称的两点，故$W_1=F(Z_1)$，$W_2=F(Z_2)$是关于实轴对称的两点．而线性变换$w=\frac{1}{c}W-\frac{d}{c}$把$W_1,W_2$变为关于$L$对称的两点$w_1$，$w_2$，即

$$w_1=F_1(z_1)=\frac{1}{c}F(Z_1)-\frac{d}{c},\qquad w_2=F_1(z_2)=\frac{1}{c}F(Z_2)-\frac{d}{c}$$

关于L是对称的．定理证毕．

注意，1)在定理 2 和定理2′中，域D在l的同一侧， 在于保证$f(z)$越过边界上的线段S解析开拓到$D\cup D'\cup S$内的函数$F(z)$是单值的．在相反的情况下，如图7-15所示，在D内存在关于实轴对称的两点 z_1，z_2，当 $f(z_1)\neq\overline{f(z_2)}$时，对称开拓后的$F(z)$在点$z_1$就是双值的．2） 如果定理2′中的$f(z)$在$D$内是单叶的，且$S$上的点与$L$上的线段$T$(不包括端点)上的点之间是一一对应的，$f(D)$位于直线$L$的同一侧，那么$f(z)$越过$S$的解析开拓$F(z)$在$D\cup D'\cup S$是单叶解析的．但是如果$f(D)$不是位于$L$的同一侧，即使$f(z)$在$D$内单叶，$F(z)$仍然不是单叶的．事实上，这时在

$f(D)$内存在关于L对称的两点w_1，w_2．设w_1，w_2的原像是z_1，z_2．z_1关于l的对称点是z_1^*．由对称开拓，z_1^*和z_2都对应w_2，即$F(z_1^*)=F(z_2)=w_2$（图7-16）．

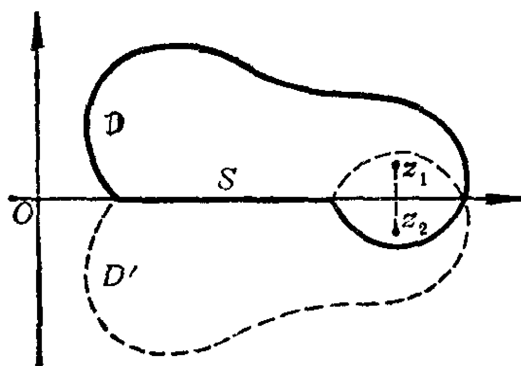


图 7-15

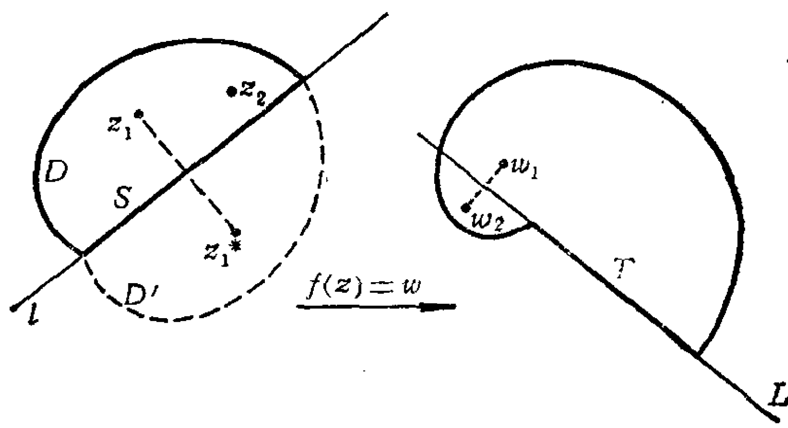


图 7-16

2． Riemann曲面的概念

为了给多值函数的各分支间相互关系的明显几何直观，我们把多值函数的各分支在z平面上解析的域看作是按照某种方式粘合起来的叶片，称为这个函数的Riemann曲面．因而，函数可以看作是在它的Riemann曲面上的单值函数．下面我们通过例子来说明如何构造多值函数的Riemann曲面．

(1) 根式函数$w=\sqrt[n]{z}$的Riemann曲面

在第二章里我们知道这是一个 n 值函数，在全平面去掉正实轴的域D内能够分出几个单值解析分支

$$w_k(z)=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}\quad(k=0,1,2,\cdots,n-1),$$

$$z=re^{i\theta}\quad(0<\theta<2\pi).$$

若设$\theta_k=\theta+2\pi k$，那么$2\pi k<\theta_k<2(k+1)\pi$，

$$w_k(z)=\sqrt[n]{r}\,e^{\frac{\theta_k}{n}i}.$$

这 n 个函数把D变为w平面上的 n 个角域：

$$G_k:\ \frac{2k\pi}{n}<\arg w<\frac{2(k+1)\pi}{n}\quad(k=0,1,2,\cdots,n-1).$$

或者说这n个角域G_k都对应于同一个域D. 也就是 G_k中的$w_k(z)$ $(k=0,1,2,\cdots,n-1)$ 对应于 D 内的同一点 z（图7-17）. 现在我们把点z看作是 n 个相同的值叠在一起，即把D看作是 n个域

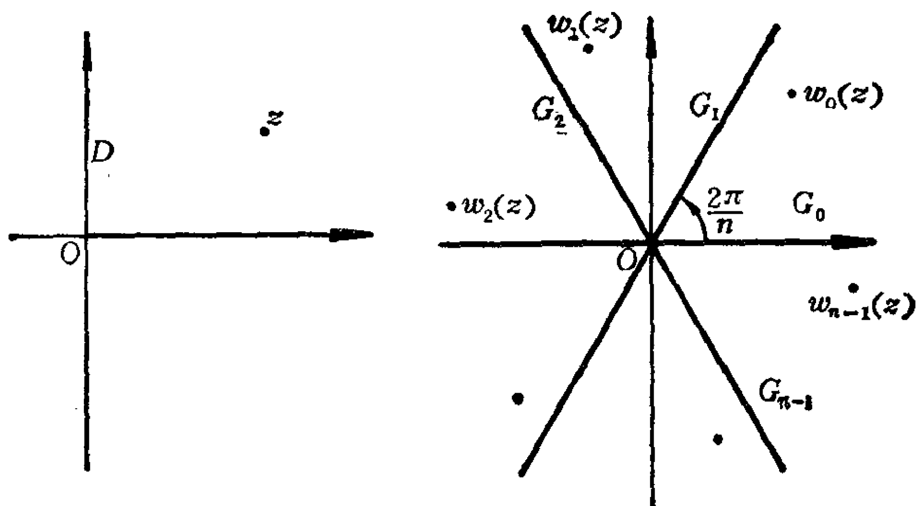


图 7-17

$$D_k:\ 2\pi k<\theta_k<2(k+1)\pi\quad(k=0,1,2,\cdots,n-1),$$

重叠在一起. 设S_k是射线$\theta_k=2k\pi$（$k=0,1,2,\cdots,n$）. 函数

$w_0(z)$ 在D_0内单叶解析，并且在D_0内连续到上边沿S_0和下边沿S_1，把D_0映为G_0. S_0和S_1分别对应于角域的两条边$\arg w=0$和$\arg w=2\pi/n$.

函数$w_1(z)$在D_1内单叶解析，且在D_1内连续到上边沿S_1和下边沿S_2，把D_1映为G_1. S_1和S_2分别变为射线$\arg w=2\pi/n$，$\arg w=4\pi/n$. 在S_1上，$w_1(z)=w_0(z)$. 由Painlevé定理，函数

$$F(z)=\begin{cases} w_0(z), & z\in D_0\cup S_1; \\ w_1(z), & z\in S_1\cup D_1 \end{cases}$$

在$D_0\cup S_1\cup D_1$内解析，即$w_0(z)$越过S_1解析开拓为$w_1(z)$. 同理$w_1(z)$越过S_2解析开拓为$w_2(z)$. 如此继续下去，$w_{n-2}(z)$越过S_{n-1}解析开拓为$w_{n-1}(z)$. 最后,由于$w_0(z)$在D_0内连续到S_0，$w_{n-1}(z)$在D_{n-1}内连续到下边沿S_n. 且当S_0和S_n上具有相同坐标的点$z=x$时，$w_0(z)=w_{n-1}(z)$. 因此，我们得到函数

$$F(z)=\begin{cases} w_0(z), & z\in S_0\cup D_0\cup S_1; \\ w_1(z), & z\in S_1\cup D_1\cup S_2; \\ w_2(z), & z\in S_2\cup D_2\cup S_3; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ w_{n-1}(z), & z\in S_{n-1}\cup D_{n-1}\cup S_n. \end{cases}$$

现在我们把D_0和D_1沿S_1粘起来，D_1和D_2沿S_2粘起来，D_{n-2}和D_{n-1}沿S_{n-1}粘起来. 最后把D_0的上边沿S_0和D_{n-1}的下边沿S_n粘起来（当然，实际上这是不可能的，而只是我们设想将这两边上具有相同坐标的点看作是同一点罢了）. 这样我们就得到粘起来的封闭的n叶"曲面"（图7-18）.

$$R=\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} D_k\right)\cup\left(\bigcup_{k=0}^{n} S_k\right)$$

这个"曲面"R称为多值函数$\sqrt[n]{z}$的Riemann曲面（注意$\sqrt[n]{z}$的支

点$z=0$不在曲面上！）. $F(z)$ 在R上是单值解析的，而在 R 的每一叶上定义多值函数$\sqrt[n]{z}$的一个分支.

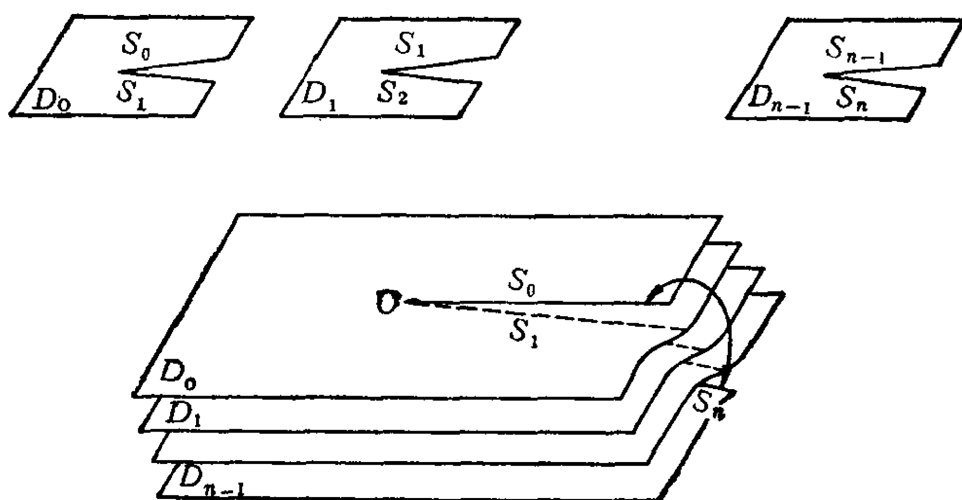


图 7-18

(2) **对数函数$w=\mathrm{Log}\, z$ 的 Riemann曲面**

前面我们已知，在z平面上去掉正实轴的域D内可以分出对数函数的单值解析分支

$$w_k(z)=\log|z|+i(\theta+2k\pi) \qquad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots),$$

其中

$$z=|z|e^{i\theta} \quad 0<\theta<2\pi,$$

这无穷多个分支$w_k(z)$把D变为带域

$$G_k:\quad 2k\pi<\mathrm{Im}w<2(k+1)\pi.$$

与前面根式函数一样，$w_k(z)$可以越过S_{k+1}解析开拓为$w_{k+1}(z)$，然后把$w_k(z)$的定义域D_k与$w_{k+1}(z)$的定义域D_{k+1}沿S_{k+1}粘起来，就得到 $\mathrm{Log}\, z$ 的Riemann曲面R（图7-19）. 这里所不同的是$\mathrm{Log}\, z$的Riemann曲面是无穷多叶的. 在R上，函数

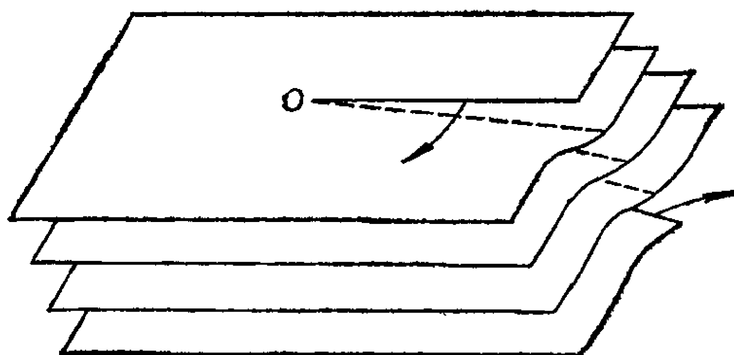


图 7-19

$$F(z)=\operatorname{Log} z=\begin{cases}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_1(z), \quad z\in S_1\cup D_1\cup S_2; \\ w_0(z), \quad z\in S_0\cup D_0\cup S_1; \\ w_{-1}(z), \quad z\in S_{-1}\cup D_{-1}\cup S_0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{cases}$$

是单值解析的．在R的每叶上定义它的一个分支．

习　题

1．证明：若整函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$在实轴上取实値，则$c_n$是实数（$n=0,1,2,\cdots$）．

2．证明：如果整函数$f(z)$在实轴上取实値，在虚轴上取虚数，则$f(z)$是奇函数．

3．设D是关于实轴对称的域，$f(z)$是D内的亚纯函数，在实轴上取实値．证明：如果a是$f(z)$的极点，$\operatorname{Res}(f(z),a)=A$，则$\operatorname{Res}(f(z),\bar{a})=\overline{A}$．

4．试作出儒可夫斯基函数的反函数 $w=z+\sqrt{z^2-1}$的Riemann曲面．

第八章　共形映照

§1　共形映照的若干性质

前面我们不止一次地用到以下事实：解析函数（非常数）作为映照来说，把域映为一个域．自然，作为特殊的解析映照的共形映照也具有这一性质．

定理1（保域性） 若函数$f(z)$在域D内解析，且不是一个常数，则$f(D)$是一个域．

证明　按域的定义，我们要证明$f(D)$是连通开集．设w_1，w_2是$f(D)$内的任意两点，在D内有点z_1，z_2，使得

$$w_1=f(z_1),\quad w_2=f(z_2).$$

因为D是连通的，所以在D内有一曲线$\gamma(t)$（$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$），连接$z_1$，$z_2$．函数$w=f(z)$将曲线$\gamma(t)$变为曲线$f[\gamma(t)]$（$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$），它是$f(D)$内连接$w_1$，$w_2$的曲线，所以$f(D)$是连通的．

设w_0是$f(D)$内的任意一点．由第五章§2的定理4，对于充分小的$\rho>0$，存在$\delta>0$，使得对于圆$|w-w_0|<\delta$内的任意一点w，在圆$|z-z_0|<\rho$内存在一点z，使得$f(z)=w$，即$V(w_0;\delta)\subset f(D)$，所以$f(D)$是开集．定理证毕．

定理2　若函数$f(z)$在域D内单叶解析，则对于D内的每一点z，$f'(z)\neq 0$．反之，若点$z_0\in D$，$f'(z_0)\neq 0$，则在点z_0的邻域内$f(z)$是单叶的．

证明　若不然，则存在点$z_0\in D$，使得$f'(z_0)=0$．z_0是函数$f(z)-f(z_0)$的m级零点($m\geqslant 2$)，由第五章§2的定理4，对于点$w_0=f(z_0)$的邻域内的w，$f(z)-w$在z_0的邻域内恰有m个零点，这与$f(z)$在D内单叶相矛盾，所以在D内$f'(z)\neq 0$．反之，

若$f'(z_0)\neq 0$，则z_0是$f(z)-f(z_0)$的简单零点．由第五章§2的定理**4**，对于充分小的ρ,存在$\delta>0$，使得对于圆$|w-f(z_0)|<\delta$内的每一点w，$f(z)-w$在圆$|z-z_0|<\rho$内只有一个零点，即只有一个z，使得$f(z)=w$．由$f(z)$的连续性，可取ρ_1（$\rho_1<\rho$），使得$f(V(z_0;\rho_1))\subset V(w_0;\delta)$，于是$f(z)$在$V(z_0;\rho_1)$内是单叶的．定理证毕．

注意,从D内$f'(z)\neq 0$只能推出$f(z)$在每一点的邻域内是单叶的，而不能推出$f(z)$在D内单叶．如$f(z)=1/z^2$在$D=\mathbf{C}-\{0\}$内解析，$f'(z)=-2/z^3\neq 0$在D内成立，但是$f(z)$在D内并不是单叶的．

在第二章我们知道，在$f'(z)\neq 0$的点,$f(z)$是保角的．如果$w=f(z)$是单叶解析函数，由定理2，它的导数在D内处处不为零．因此我们把单叶解析函数称为共形映照．由定理1，它把域D保角地映为另一个域$G=f(D)$，$f(z)$的反函数$g(w)$把G单叶地映为$D=g(G)$．由第五章§2的定理4，对任意给定的$\varepsilon>0$，若取$\rho=\varepsilon$,则$g(V(f(z_0);\delta))\subset V(z_0;\varepsilon)$．因此,$g(w)$在点$w_0=f(z_0)$是连续的．即单叶解析函数的反函数$z=g(w)$是连续的．由第二章关于反函数的定理,$g(w)$在$G$内是单叶解析的，$g'(w)=1/f'(g(w))$．综上所述有下面的定理．

定理3　若函数$w=f(z)$在域D内单叶解析，将D保角地映为域G，则反函数$z=g(w)$在G内单叶解析，把G保角地映为域D．

下面的定理是解析映照为共形映照的一个充分条件，称为边界对应原理．

定理4　设G是一个域，γ是G内的可求长简单闭曲线,其内部D属于G．若函数$f(z)$在G内解析，把γ双方单值地映为简单闭曲线Γ，则$w=f(z)$在D内单叶，把D映为Γ的内部Ω（图8-1）．

证明　设w_0是不在Γ上的一点．由幅角原理我们知，函数

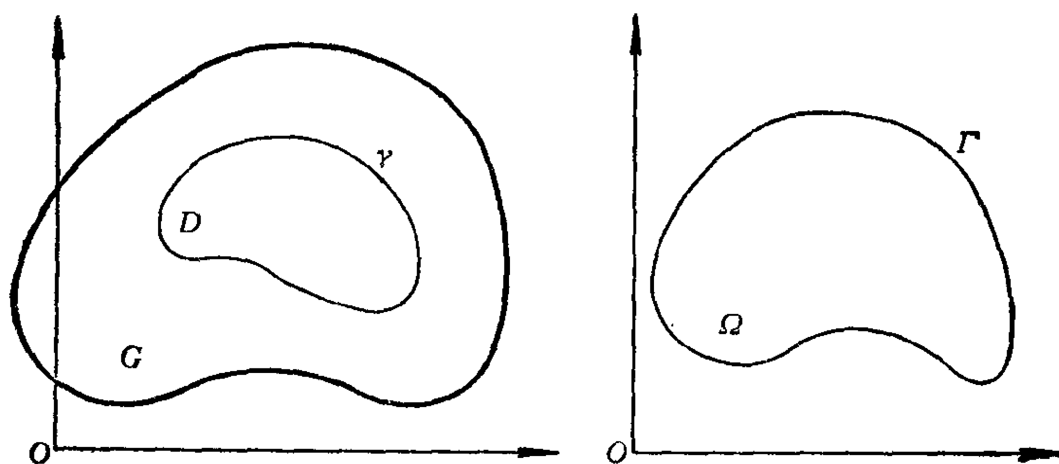


图 8-1

$f(z)-w_0$在γ内的零点个数N等于积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)-w_0}dz=\pm\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{dw}{w-w_0}.$$

当点w_0在Γ的外部时，则

$$\int_{\Gamma}\frac{lw}{w-w_0}=0.$$

所以$N=0$，$f(z)-w_0$在D内沒有零点；当点w_0在Γ的内部时，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{1}{w-w_0}dw=1.$$

所以

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)-w_0}dz=\pm 1.$$

由于N总是一个非负整数，所以$N=1$，即$f(z)-w_0$在D内有一零点．并且当点z沿γ正向绕行一圈时，$w=f(z)$沿Γ的正向绕行一圈．当点w_0在Γ上时，函数$f(z)-w_0$在D内沒有零点．事实

上，如存在点$z_0 \in D$，$f(z_0)=w_0$，那么由于$f(D)$是一域，所以存在w_0的一个邻域$V(w_0;\ \delta)\subset f(D)$，对于$V(w_0;\ \delta)$内的每一点$w_1$，函数$f(z)-w_1$在$D$内有零点．特别地，若取$w_1$是$V(w_0;\ \delta)$内且位于$\Gamma$外部的点，则与前面所证明的$f(z)-w_1$在$D$内无零点相矛盾．定理证毕．

类似地可以证明，若函数$f(z)$在D内除去点z_0外是解析的，z_0是$f(z)$的一级极点，$f(z)$把D内的可求长简单闭曲线γ（z_0位于γ的内部）双方单值地变为简单闭曲线Γ，但Γ的方向与γ反向，则$f(z)$把γ的内部除去z_0外单叶地映为Γ的外部．

§2　分式线性变换

具有下述形式的函数称为分式线性函数或分式线性变换：

$$w=L(z)=\frac{az+b}{cz+d}, \tag{1}$$

其中a,b,c,d是复常数，且

$$\triangle=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc\neq 0. \tag{2}$$

当$\triangle=ad-bc=0$时，$L(z)$将是常数或无意义．所以，以下我们总是假定分式线性变换(1)满足条件(2)．

若$c\neq 0$，则除去点$z=-d/c$外，$L(z)$是解析的，点$z=-d/c$是$L(z)$的一级极点；若$c=0$，则由(2)式，$d\neq 0$，$L(z)=Az+B$，其中$A=a/d, B=b/d$．这时，$L(z)$是一个线性变换．$z=\infty$是它的一级极点．

分式线性变换（1）的反函数

$$z=L^{-1}(w)=\frac{-dw+b}{cw-a} \tag{3}$$

也是一个分式线性变换．若$c\neq 0$，我们规定点$z=-d/c$与点$w=$

∞相对应；点$z=\infty$与点$w=a/c$相对应；若$c=0$，则点$z=\infty$与点$w=\infty$相对应．于是，分式线性变换$w=L(z)$建立了扩充平面上的点到扩充平面上的点的一一对应，即$L(z)$把扩充z平面单叶地映为扩充w平面．下面的定理说明反之亦然．

定理 1　若$w=f(z)$在扩充平面上除去点$z=z_0$外是解析的，而且单叶，则$f(z)$必是分式线性变换．

证明　z_0是$f(z)$的孤立奇点．由Picard定理它不可能是$f(z)$的本性奇点．由Liouville定理z_0也不可能是$f(z)$的可去奇点．因此，z_0只能是$f(z)$的极点．由单叶性，z_0只能是$f(z)$的一级极点．因为若z_0是$f(z)$的m级极点，$m\geqslant 2$，那么z_0是函数$g(z)=1/f(z)$的m级零点，且$g(z)$在z_0的邻域内是单叶的．但是由第五章§2的定理4，显然，$g(z)$就不能是单叶的．所以，$f(z)$在z_0邻域Laurent展式的主要部分

$$\psi(z)=\begin{cases}\dfrac{A}{z-z_0}, & z_0\neq\infty;\\ Az\ , & z_0=\infty,\end{cases}$$

其中A是常数．于是，函数

$$\varphi(z)=f(z)-\psi(z)$$

在扩充平面上是解析的，因而$\varphi(z)=B$（常数），即

$$f(z)=B+\frac{A}{z-z_0}\ ,$$

或

$$f(z)=Az+B\ .$$

所以，$f(z)$是一个分式线性变换．定理证毕．

设$L(z)$是分式线性变换(1)．若$c\neq 0$，则它的导数

$$L'(z)=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}\ . \tag{4}$$

所以在除去点$z=-d/c$及$z=\infty$外，分式线性变换是保角的；若$c=0$，则$L(z)=Az+B, L'(z)=A$。所以$L(z)$在有穷平面上是保角的。

分式线性变换(1)可以分解为下面四个简单变换。

当$c=0$时，$w=Az+B$，$A=a/d\neq 0$，$B=b/d$。若设$A=re^{i\alpha}$，那么$w=Az+B$可以分解为：

$$z_1=e^{i\alpha}z,\quad z_2=rz_1,\quad w=z_2+B.$$

当$c\neq 0$时，那么

$$w=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2}\cdot\frac{1}{z+\frac{d}{c}}.$$

它可以分解为

$$z_1=z+\frac{d}{c},\quad z_2=\frac{1}{z_1},\quad w=\frac{bc-ad}{c^2}z_2+\frac{a}{c}.$$

最后一个变换又可按照上面那样分解为三个变换。因此，对于一般的分式线性变换(1)可以分解下面四个简单变换的复合：

$$w=z+a,\quad w=e^{i\alpha}z,$$

$$w=rz,\quad w=\frac{1}{z}.$$

现在我们来说明这四个变换的意义。

1） $w=z+a$，这是一个平移（图8-2(a)）；

2） $w=e^{i\alpha}z$（α是实常数），这是一个旋转（图8-2(b)）；

3） $w=rz$（r是正实数），这是一个相似变换（图8-2(c)）；

4） $w=1/z$。这个变换可以分解为：

$$z_1=\frac{1}{\bar{z}},\quad w=\bar{z}_1.$$

在第一章§2，我们已知它们分别是关于单位圆的对称变换与关于实轴的对称变换。称z，z_1是关于单位圆周$|z|=1$的两个对

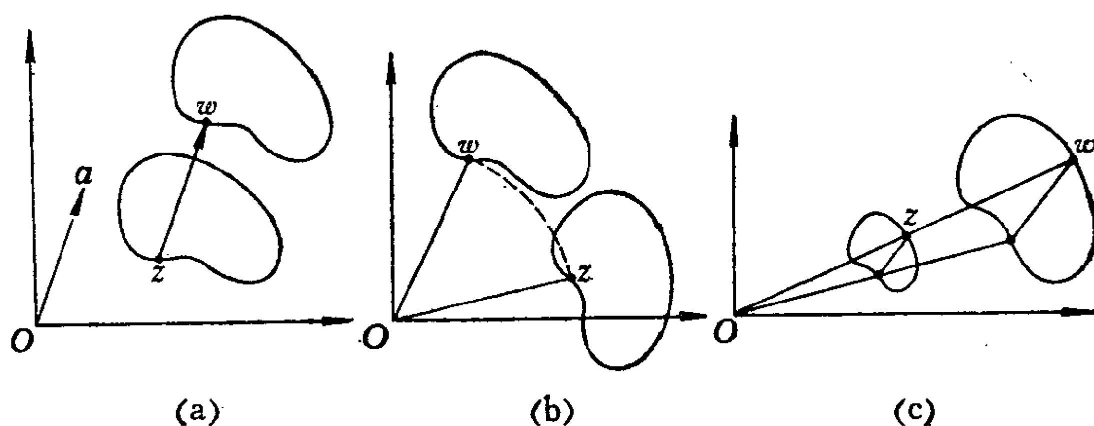


图 8-2

称点．它们分别在单位圆周的内部和外部．当z在单位圆周上时，那么它的对称点z_1就是它自身．一般地说，如γ是以a为圆心，R为半径的圆周，z_1, z_2两点满足条件

$$z_2 - a = \frac{R^2}{\overline{z_1 - a}}\ ,\qquad (5)$$

则称z_1, z_2是关于圆周γ的两个对称点（图8-3）．特别地，对于圆周γ上的点，和它对称的点就是其自身；圆心$z = a$和无穷远点$z = \infty$也看作是关于γ的两个对称点．

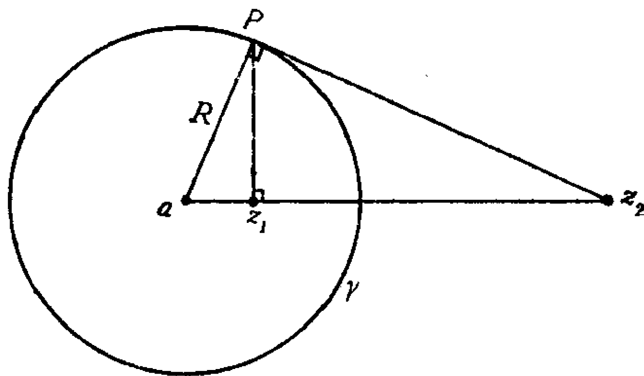


图 8-3

对称点的一个基本性质是：过z_1, z_2两点的任意圆周必与γ正交（图8-4）．事实上，设Γ是过z_1, z_2两点的任一圆周，过a点作Γ的切线，切点为z'．根据平面几何的定理知道，切线长的平方

$$|z' - a|^2 = |z_1 - a|\,|z_2 - a|\,.$$

由(5)式得到$|z' - a|^2 = R^2$，$|z' - a| = R$．即切线$\overline{az'}$是圆周γ

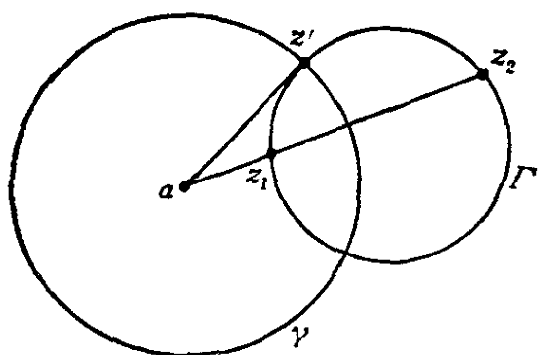


图 8-4

的半径，所以Γ和γ正交.

下面我们用两对称点给出圆周的另一种表示法. 设有圆周γ:

$$|z-a|=R(R>0),$$

z_1，z_2是关于它的两个对称点，$z_1 \neq z_2$. $z_1=a+\rho_1 e^{i\alpha}$，$z_2=a+\rho_2 e^{i\alpha}$. $\rho_1\rho_2=R^2$. 当$z\in\gamma$时，$z=a+Re^{i\theta}$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，我们有

$$\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=\left|\frac{Re^{i\theta}-\rho_1 e^{i\alpha}}{Re^{i\theta}-\rho_2 e^{i\alpha}}\right|=\frac{\rho_1}{R}\left|\frac{Re^{i\theta}-\rho_1 e^{i\alpha}}{\rho_1 e^{i\theta}-Re^{i\alpha}}\right|,$$

所以

$$\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=\frac{\rho_1}{R}=\frac{R}{\rho_2}, \tag{6}$$

即圆周γ上的点满足方程(6).

反之，满足(6)的点也一定在圆周γ上，其中z_1，z_2是关于圆周γ的两个对称点. 事实上，若设

$$w=\frac{z-z_1}{z-z_2}=\frac{\rho_1}{R}e^{i\theta},$$

那么

$$z=\frac{z_1-wz_2}{1-w},$$

$$z-a=\frac{(z_1-a)-w(z_2-a)}{1-w}=e^{i\alpha}\frac{\rho_1-\rho_2 w}{1-w}.$$

注意到$\rho_1\rho_2=R^2$，我们有

$$|z-a|=\left|\frac{\rho_1-\rho_2 w}{1-w}\right|=\left|\frac{\rho_1-\dfrac{\rho_1\rho_2}{R}e^{i\theta}}{1-\dfrac{\rho_1}{R}e^{i\theta}}\right|$$

$$= R\left|\frac{\rho_1 - Re^{i\theta}}{R - \rho_1 e^{i\theta}}\right|,$$

所以

$$|z - a| = R.$$

现在考虑方程

$$\left|\frac{z - z_1}{z - z_2}\right| = k \quad (k \neq 1), \tag{7}$$

其中k是正实数，z_1，z_2是不相等的两个复常数.我们证明(7)式表示一圆周，z_1，z_2是关于它的两个对称点. 事实上，由(7)式知，$|z - z_1| = k|z - z_2|$，所以

$$|(z - z_1) - k^2(z - z_2)| = k|(z - z_1) - (z - z_2)|$$

(见第一章§2的习题18).上式两边同除以$|1 - k^2|$得到

$$\left|z - \frac{z_1 - k^2 z_2}{1 - k^2}\right| = \frac{k}{|1 - k^2|}\cdot|z_1 - z_2|,$$

即

$$|z - a| = R,$$

其中

$$a = \frac{z_1 - k^2 z_2}{1 - k^2}, \quad R = \frac{k|z_1 - z_2|}{|1 - k^2|}.$$

并且

$$z_1 - a = \frac{k^2}{1 - k^2}(z_2 - z_1), \qquad z_2 - a = \frac{1}{1 - k^2}(z_2 - z_1),$$

$$z_2 - a = \frac{R^2}{\overline{z_1 - a}},$$

所以z_1, z_2是关于圆周$|z - a| = R$的两个对称点.

当$k = 1$时，方程为

$$\left|\frac{z - z_1}{z - z_2}\right| = 1. \tag{8}$$

显然，它表示一条直线L，z_1，z_2是关于L的两个对称点（图8-5）.

现在如果把有穷平面$\mathbf{C}$上的直线看作是扩充平面上经过点$z=\infty$的圆周，那么，对于任意正实数k，在扩充平面上，方程(7)都表示一个圆周．当且仅当$k=1$时，(7)式表示这个圆周过点$z=\infty$，即一条直线．综上所述得到下面的定理．

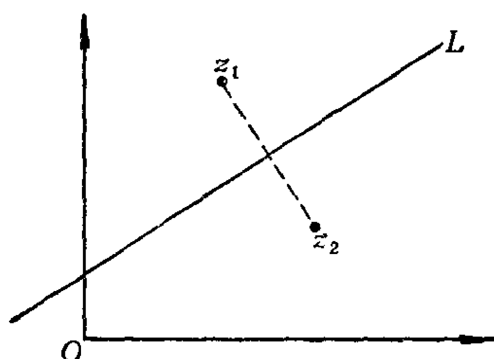


图 8-5

定理2 任意一个圆周都可以表示为

$$\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=k \quad (k>0). \tag{9}$$

其中z_1，z_2是关于它的两个对称点．当$k\neq1$时，这个圆周的圆心及半径分别为

$$a=\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2}, \tag{10}$$

$$R=\frac{k|z_1-z_2|}{|1-k^2|}. \tag{11}$$

方程(9)代表扩充平面$\mathbf{C}_\infty$上的圆周，z_1，z_2是关于它的两个对称点．这个圆周称为Apollonius圆周．当$k\neq1$时，它的圆心与半径分别由(10)式和(11)式表示．对不同的k，我们得到不同的Apollonius圆周C_k，圆心和半径分别为a_k，R_k．不难看出以下事实

$$\lim_{k\to+0}a_k=z_1, \quad \lim_{k\to+0}R_k=0;$$

圆周C_k上的点z趋于点z_1．同样

$$\lim_{k\to+\infty}a_k=z_2, \quad \lim_{k\to+\infty}R_k=0.$$

圆周C_k上的点z趋于点z_2．因此，当$0<k<+\infty$时，Apollonius圆周族C_k，以关于它们都是对称的两点z_1，z_2作为极限点．此外

$$\lim_{k\to 1} a_k = \infty, \quad \lim_{k\to 1} R_k = +\infty,$$

圆周族C_k以直线$\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right| = 1$为极限位置(图8-6)。由于$z_1, z_2$是关于圆周族$C_k$中每个圆周的两个对称点，所以过$z_1, z_2$两点的任意圆周与$C_k$中的每个圆周都是正交的.

如果我们考虑分式线性变换

$$w = \frac{z-z_1}{z-z_2}, \tag{12}$$

那么，它把z平面上的Apollonius圆周族

$$C_k: \quad \left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right| = k$$

映为同心圆周族：$|w| = k$. 由保角性，它把过z_1，z_2两点的圆周族映为过原点$w=0$的直线族（图8-6）.

现在我们可以利用定理 2 来证明分式线性变换的下述重要性质：

定理 3 任意分式线性变换

$$w = L(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (ad-bc \neq 0)$$

将圆周K变为圆周H，并且将关于K的两个对称点变为关于H的两个对称点.

证明 设z_1, z_2是关于圆周K的两个对称点，$z_1 \neq z_2$. 圆周K可表示为

$$\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right| = k \quad (k > 0).$$

将$z = L^{-1}(w) = \dfrac{-dw+b}{cw-a}$代入$k$的方程，得到

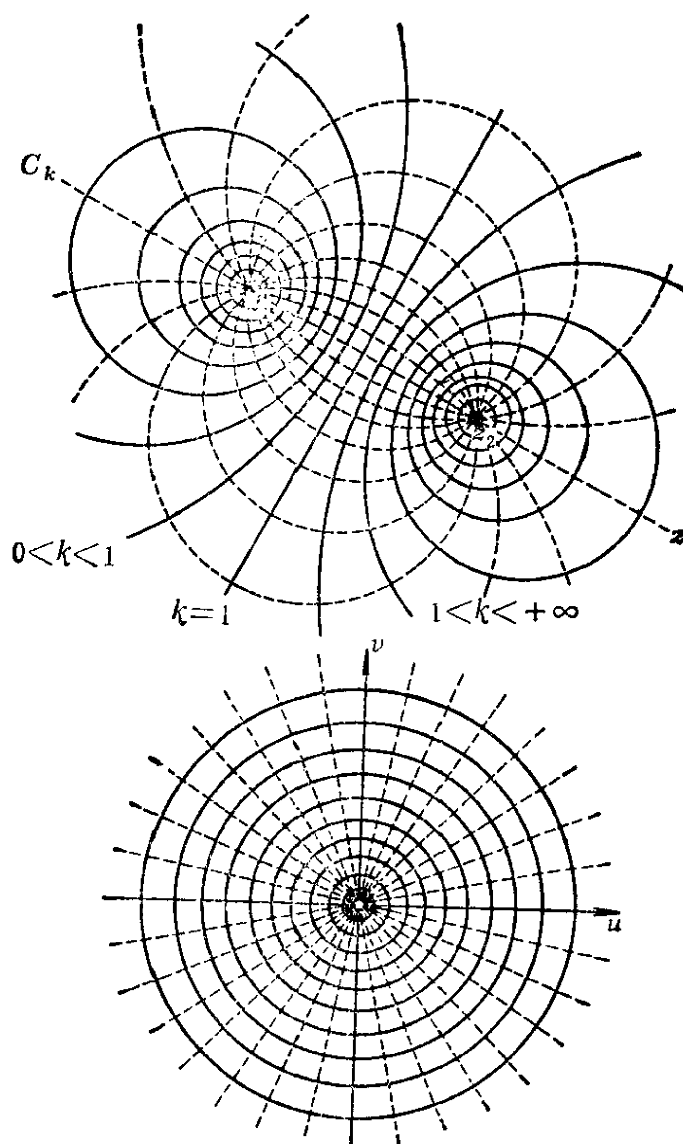


图 8-6

$$\left|\frac{\dfrac{-dw+b}{cw-a}-z_1}{\dfrac{-dw+b}{cw-a}-z_2}\right|=k,$$

即

$$\left|\frac{(cz_1+d)w-(az_1+b)}{(cz_2+d)w-(cz_2+b)}\right|=k. \qquad (13)$$

若 $cz_1+d\neq 0$，$cz_2+d\neq 0$，那么由(13)式得到

$$\left|\frac{w-w_1}{w-w_2}\right|=h.$$

其中

$$w_1=L(z_1)=\frac{az_1+b}{cz_1+d},\qquad w_2=L(z_2)=\frac{az_2+b}{cz_2+d},$$

$$h=\left|\frac{cz_2+d}{cz_1+d}\right|k.$$

由定理 2，H：$\left|\frac{w-w_1}{w-w_2}\right|=h$是一圆周，$z_1,z_2$两点的象$w_1,w_2$是关于$H$的两个对称点。若$cz_1+d=0$，那么这时$cz_2+d\neq 0$，$az_1+b\neq 0$；由(13)式得到

$$\left|\frac{az_1+b}{(cz_2+d)w-(az_2+b)}\right|=k,$$

即

$$|w-w_2|=\frac{|az_1+b|}{k|cz_2+d|}.$$

这是w平面上以点w_2为圆心的圆周．点$w_1=\infty$（点z_1的像）与点w_2是关于这个圆周的两个对称点．若$cz_2+d=0$，那么这时有$cz_1+d\neq 0$，$az_2+b\neq 0$，由(13)式得到

$$|w(cz_1+d)-(az_1+d)|=k|az_2+d|,$$

即

$$|w-w_1|=k\frac{|az_2+b|}{|cz_1+d|}.$$

这是w平面上以w_1为圆心的圆周．w_1与$w_2=\infty$（点z_2的像）是关于这个圆周的两个对称点．定理证毕．

一个分式线性变换

$$w=L(z)=\frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc\neq 0,$$

除去恒同变换$L(z)=z$外($a=d=1$, $b=c=0$),它的不动点，即满足方程$(az+b)/(cz+d)=z$的点至多只有两个，这是因为方程

$$cz^2+(d-a)z-b=0$$

至多只有两个根：当$c\neq 0$时,它恰有两个不动点(可能重合)；当$c=0$时，$L(z)=Az+B$. 若$A\neq 1$，则方程$Az+B=z$的根$z_1=-B/(A-1)$及$z_2=\infty$是$L(z)$的不动点. 若$A=1$，$L(z)=z+B$,它是一个平移，仅以$z=\infty$为不动点.

现在假定z_1，z_2，z_3是$\mathbf{C}_\infty$上的三个不同点，在分式线性变换$w=L(z)$下的象分别是w_1，w_2，w_3. 如果另有一个分式线性变换$w=L_1(z)$也使$L_1(z_k)=w_k(k=1,2,3)$,那么，$L_1^{-1}(L(z))$也是一个分式线性变换,且把z_k变为它们自身. 因此$L_1^{-1}(L(z))=z$,所以$L_1(z)=L(z)$. 这表明一个分式线性变换由$\mathbf{C}_\infty$上的三个不同点唯一确定.

设z_2,z_3,z_4是$\mathbf{C}_\infty$上的三个不同点，考虑如下的分式线性变换

$$L^*(z)=\begin{cases}\dfrac{z-z_2}{z-z_4}:\dfrac{z_3-z_2}{z_3-z_4}, & z_2,z_3,z_4\in\mathbf{C};\\[2ex] \dfrac{z_3-z_4}{z-z_4}, & z_3,z_4\in\mathbf{C},\ z_2=\infty;\\[2ex] \dfrac{z-z_2}{z-z_4}, & z_2,z_4\in\mathbf{C},\ z_3=\infty;\\[2ex] \dfrac{z-z_2}{z_3-z_2}, & z_2,z_3\in\mathbf{C},\ z_4=\infty.\end{cases} \tag{14}$$

$L^*(z)$是将z_2,z_3,z_4依次映为$0,1,\infty$的唯一的分式线性变换.

设z_1是$\mathbf{C}_\infty$上的任意一点. 在映照(14)下,z_1的象称为z_1，z_2，z_3,z_4的交比，记作(z_1,z_2,z_3,z_4)，即

$$(z_1,z_2,z_3,z_4)=L^*(z_1).$$

亦即

$$(z_1,z_2,z_3,z_4)=\frac{z_1-z_2}{z_1-z_4}:\frac{z_3-z_2}{z_3-z_4},\quad z_2,z_3,z_4\in\mathbf{C},$$

$$(z_1,\infty,z_3,z_4)=\frac{z_3-z_4}{z_1-z_4},\qquad z_3,z_4\in\mathbf{C},$$

$$(z_1,z_2,\infty,z_4)=\frac{z_1-z_2}{z_1-z_4},\qquad z_2,z_4\in\mathbf{C},$$

$$(z_1,z_2,z_3,\infty)=\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2},\qquad z_2,z_3\in\mathbf{C}.$$

按照定义容易看出，$(z_2,z_2,z_3,z_4)=0$，$(z_3,z_2,z_3,z_4)=1$，$(z_4,z_2,z_3,z_4)=\infty$，$(z,0,1,\infty)=z$.

定理 4　若z_2,z_3,z_4是$\mathbf{C}_\infty$上的三个不同点，$w=L(z)$是任意分式线性变换，则对于任意z_1，有

$$(z_1,z_2,z_3,z_4)=(L(z_1),L(z_2),L(z_3),L(z_4)),$$

即交比在任意分式线性变换下是不变的.

证明　因$L^*(z)=(z,z_2,z_3,z_4)$将z_2,z_3,z_4依次变为$0,1,\infty$，所以分式线性变换$L^*\{L^{-1}(w)\}$将$L(z_2),L(z_3),L(z_4)$依次变为$0,1,\infty$. 依交比定义，

$$(w,L(z_2),L(z_3),L(z_4))=L^*\{L^{-1}(w)\}$$

对任意w成立. 特别地，令$w=L(z_1)$就得到

$$(L(z_1),L(z_2),L(z_3),L(z_4))=L^*(z_1)=(z_1,z_2,z_3,z_4).$$

定理证毕.

由定理4立即得到，将已知三个不同点z_1,z_2,z_3分别映为w_1,w_2,w_3的分式线性变换是

$$(w,w_1,w_2,w_3)=(z,z_1,z_2,z_3),$$

即

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}.\qquad(15)$$

若z_k或w_k中某一个是∞，则包含它的那个因子不出现。

定理5 扩充z平面上的任意一个圆D_z都可以用一个分式线性变换映为扩充w平面上的任意一个圆D_w。

证明 我们只限于D_z，D_w都是眞圆的情形证明这个定理。对于D_z，D_w中有一个是半平面或者两个都是半平面的情形，证明是类似的。在D_z的边界C_z（圆周）上取三个不同点z_1，z_2，z_3，使得当z沿C_z从z_1运动到z_2再运动到z_3时，D_z在它的左边。按照同样的方法，在D_w的边界C_w上取三个不同点w_1，w_2，w_3，由公式(15)确定的分式线性变换$w=L(z)$把C_z映为C_w，把D_z映为以C_w为边界的两个域中的一个，我们要证明$L(z)$一定是把D_z映为D_w。事实上，过z_2于D_z内作一法向量n_z，当z沿着C_z运动到z_2时，n_z在它的左边，n_z在$L(z)$下的象n_w是过w_2的直线段或一圆弧。由保角性，当w沿C_w运动经过w_2时，n_w应在它的左边。按照w_1，w_2，w_3的取法，n_w在D_w内，所以它把D_z映为D_w。定理证毕。

最后，我们讲几个重要的分式线性变换，作为这一节的结束。

1) **将上半平面$\mathrm{Im}\, z>0$映为单位圆$|w|<1$的分式线性变换**

设$w=L(z)=(az+b)/(cz+d)$是这个分式线性变换，它把x轴映为单位圆周$|w|=1$。由定理3，若$L(\alpha)=0$ ($\mathrm{Im}\,\alpha>0$)，那么$L(\bar{\alpha})=\infty$。

因此

$$a\alpha+b=0, \quad c\bar{\alpha}+d=0.$$

于是

$$L(z)=\frac{a}{c}\cdot\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}.$$

当$z=0$时，$|w|=1$，所以$\left|\frac{a}{c}\right|=1$，$\frac{a}{c}=e^{i\theta}$（$\theta$是一实数），

即

$$w=L(z)=e^{i\theta}\frac{z-a}{z-\bar{a}}. \tag{16}$$

分式线性变换(16)把以$a,\bar{a}$为极限点的Apollonius圆周族

$$\left|\frac{z-a}{z-\bar{a}}\right|=k\ \ (0<k<1)$$

映为w平面上以原点为中心的圆周族$|w|=k$，把过$a,\bar{a}$的圆周并且在上半平面的那部分映为单位圆内的直径（图8-7）.

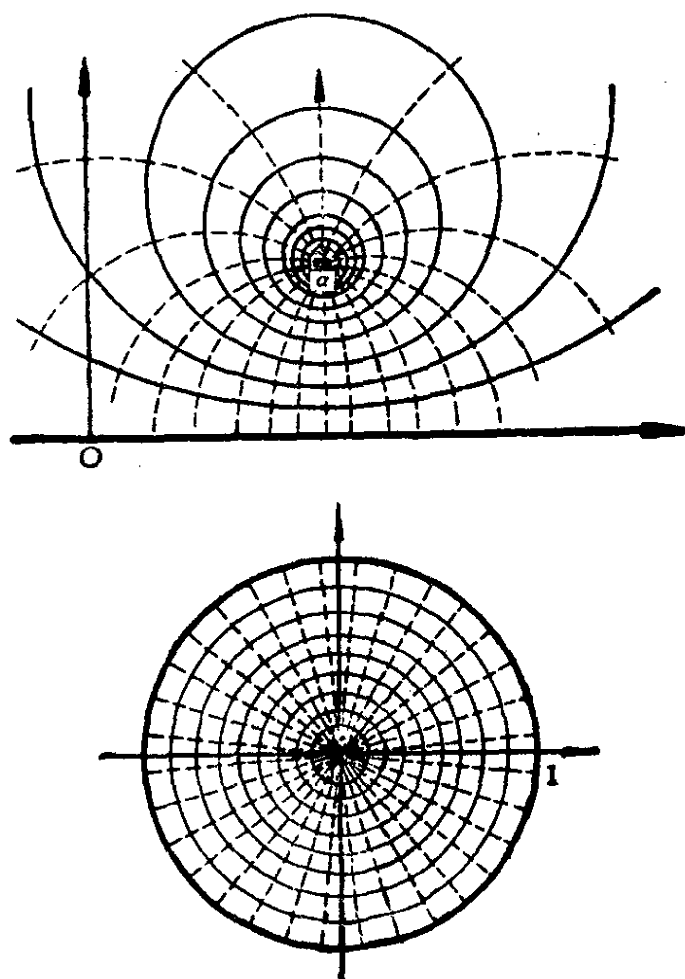


图 8-7

2）将单位圆$|z|<1$映为单位圆$|w|<1$的分式线性变换

设$w=L(z)=(az+b)/(cz+d)$是这个分式线性变换，它把圆周$|z|=1$映为圆周$|w|=1$. 由定理3，若点$z=\alpha(|\alpha|<1)$对应于点$w=0$，那么，点$z=1/\bar{\alpha}$对应于点$w=\infty$. 因此

$$a\alpha+b=0,\ c\frac{1}{\bar{\alpha}}+d=0.$$

于是

$$w=L(z)=\frac{a}{c}\cdot\frac{z-\alpha}{z-\dfrac{1}{\bar{\alpha}}}=k\ \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z},$$

其中$k=-a\alpha/c$. 由于当$z=1$时，$|w|=1$，所以

$$\left|k\frac{1-\alpha}{1-\bar{\alpha}}\right|=|k|=1.$$

最后得到

$$w=L(z)=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\quad(\theta\text{是一实数}).\qquad(17)$$

特别地，若$\alpha=0$，则$w=e^{i\theta}z$.

若将(17)式写成

$$w=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}=-\frac{e^{i\theta}}{\bar{\alpha}}\cdot\frac{z-\alpha}{z-\dfrac{1}{\bar{\alpha}}},$$

并且注意到它把圆周$|z|=1$变为圆周$|w|=1$，我们便看出，单位圆周$|z|=1$即是Apollonius圆周$\left|\dfrac{z-\alpha}{z-(1/\bar{\alpha})}\right|=|\alpha|$. 变换(17)将Apollonius圆周族

$$\left|\frac{z-\alpha}{z-(1/\bar{\alpha})}\right|=k\qquad(0<k<|\alpha|)$$

变为同心圆周族$|w|=k/|\alpha|$，而将过$\alpha,1/\bar{\alpha}$两点且在圆周$\left|\dfrac{z-\alpha}{z-(1/\bar{\alpha})}\right|=|\alpha|$（即$|z|=1$）内部的那些圆弧变为圆$|w|<1$的直径（图8-8）.

3）将上半平面$\mathrm{Im}z>0$映为上半平面$\mathrm{Im}w>0$的分式线性变换

设$w=L(z)=(az+b)/(cz+d)$是这个分式线性变换，它把实轴变为实轴. 若在实轴x上取三个不同的点与实轴u上相对应的三点代入(15)式，那么我们立即看出，a,b,c,d一定都是实数. 因此

$$\bar{w}=\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d},\qquad w-\bar{w}=\frac{(ad-bc)(z-\bar{z})}{|cz+d|^2},$$

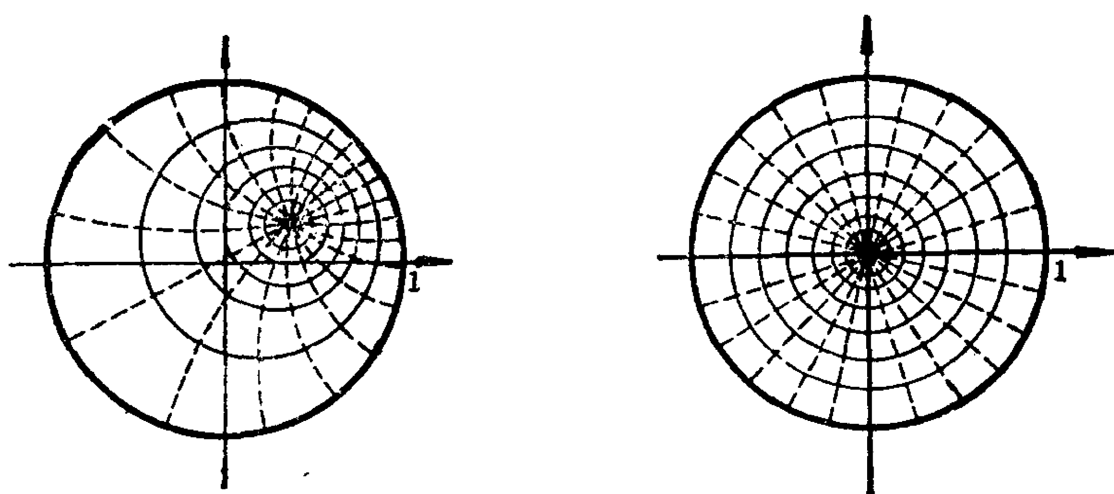


图 8-8

即

$$\mathrm{Im}w = \frac{ad-bc}{|cz+d|^2}\mathrm{Im}z.$$

由此可见，若$ad-bc>0$，则$L(z)$将上半平面$\mathrm{Im}z>0$映为上半平面$\mathrm{Im}w>0$；若$ad-bc<0$，则$L(z)$将上半平面映为下半平面$\mathrm{Im}w<0$.反之，若$L(z)=(az+b)/(cz+d)$，a,b,c,d都是实数，则$L(z)$把实轴变为实轴；当$\triangle=ad-bc>0$时，$L(z)$把上半平面变为上半平面，下半平面变为下半平面；当$\triangle=ad-bc<0$时，$L(z)$把上半平面变为下半平面，下半平面变为上半平面.

附注 在前一章讲述对称原理时，我们假定D和D'关于直线段S是对称的.现在我们可以把S易为一段圆弧，D'是由D经过关于圆弧S反演而得到的(图8-9)，那么对称原理仍然成立. 事实上，我们只要用分式线性变换把S映为直线段.这时关于圆弧S对称的两个域就变为关于直线段对称的两个域.

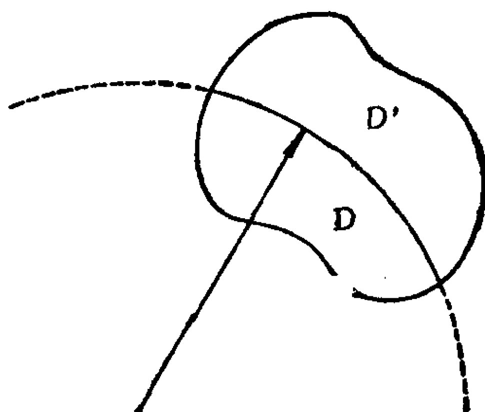


图 8-9

习　题

1．求出将单位圆映为单位圆的分式线性变换 $L(z)$，并使 $L(0)=a$，$L'(0)>0$.

2．求出圆 $|z|<R$ 到单位圆 $|w|<1$ 的分式线性变换.

3．求出上半平面到上半平面的分式线性变换 $L(z)$，使得 ∞，0，1 分别映为 0，1，∞.

4．求出上半平面到圆 $|z|<R$ 的分式线性变换 $L(z)$，使得 $L(i)=0$，$L'(i)=1$．求出 R 的值.

5．求出上半平面到单位圆的分式线性变换，使得 -1，0，1 分别变为 1，i，-1.

6．证明有两个不动点 a,b $(a,b\in \mathbb{C})$ 的分式线性变换可写成以下形式：

$$\frac{w-a}{w-b}=h\frac{z-a}{z-b},\quad h\text{是复常数}.$$

7．求出单位圆到自身的分式线性变换，使得 1/2，2 为不动点，$\frac{1}{4}(5+3i)$ 变为无穷远点.

8．证明只有一个有穷不动点 α $(\alpha\in \mathbb{C})$ 的分式线性变换可以写成以下形式：

$$\frac{1}{w-\alpha}=\frac{1}{z-\alpha}+h,\quad h\text{是不为零的常数}.$$

9．设 $w=L(z)$ 是单位圆到自身的分式线性变换，证明：

(1) 对于单位圆内的任意两点 z_1,z_2，有

$$\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1z_2}\right|=\left|\frac{w_1-w_2}{1-\bar{w}_1w_2}\right|,\qquad w_k=L(z_k)\ (k=1,2);$$

(2) $$\frac{|dz|}{1-|z|^2}=\frac{|dw|}{1-|w|^2}.$$

10．设γ 是过-1，1的任意圆周，z_1, z_2两点不在γ上，且$z_1z_2=1$．证明z_1, z_2两点中一个点在γ的内部，而另一个点在γ的外部．

11．求出所有与圆周$|z|=1$及$|z-1|=4$正交的圆周．

12．证明z_1, z_2关于圆周$Az\bar{z}+B\bar{z}+\bar{B}z+D=0$对称的充要条件是：$Az_1\bar{z}_2+B\bar{z}_2+\bar{B}z_1+D=0$．

13．证明：交比(z_1,z_2,z_3,z_4)为实数，其充要条件是z_1,z_2,z_3，z_4四点共圆．

14．若四边形相邻顶点z_1,z_2,z_3,z_4共圆，则

$$|z_1-z_3||z_2-z_4|=|z_1-z_2||z_3-z_4|+|z_2-z_3||z_1-z_4|.$$

15．证明：单位圆到单位圆的共形映照必是分式线性变换．

提示：利用Schwarz引理．

16．若函数$f(z)$在圆环$r<|z|<R$内解析，在$r<|z|\leqslant R$连续，并且在圆周$|z|=R$上，$f(z)=0$，则在$r<|z|<R$内，$f(z)\equiv 0$．

17．若函数$f(z)$在圆$|z|<R$内解析，在$|z|\leqslant R$上连续，$M(r)$和$A(r)$分别是$|f(z)|$和$\mathrm{Re}f(z)$在圆周$|z|=r$上的最大值，则当$0<r<R$时，

$$M(r)\leqslant\frac{2r}{R-r}A(R)+\frac{R+r}{R-r}|f(0)|.$$

这个不等式称为Carathéodory不等式．

提示：利用Schwarz引理与分式线性变换．

18．设函数$f(z)$在单位圆$|z|<1$内解析，$|f(z)|<1$，z_1，$z_2,\cdots,z_n$是$f(z)$在单位圆$|z|<1$内按重数计算的零点，求证

$$|f(z)|\leqslant\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{z-z_k}{1-\bar{z}_kz}\right|.$$

特别地有

$$|f(0)|\leqslant\prod_{k=1}^{n}|z_k|.$$

19．若函数$f(z)$在单位圆$|z|<1$内解析，且$|f(z)|\leqslant 1$，则

(1) $$\left|\frac{f(z)-w_0}{1-\bar{w}_0 f(z)}\right|\leqslant\left|\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right|,$$

其中$|z_0|<1$，$w_0=f(z_0)$．特别地，有

$$\left|\frac{f(z)-f(0)}{z}\right|\leqslant|1-\overline{f(0)}f(z)|;$$

(2) $$|f'(z)|\leqslant\frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}\leqslant\frac{1}{1-|z|^2}.$$

20．若函数$f(z)$在单位圆$|z|<1$内解析，且$|f(z)|\leqslant 1$，则当$|z|<1$时，

$$\frac{|f(0)|-|z|}{1-|f(0)||z|}\leqslant|f(z)|\leqslant\frac{|f(0)|+|z|}{1+|f(0)||z|}.$$

21．设函数$f(z)$在单位圆$|z|<1$内解析，$|f(z)|\leqslant 1$，$f(0)=0$．若对于$|z_1|=|z_2|=r<1$有$f(z_1)=f(z_2)=w$，则$|w|\leqslant r^2$．

提示：考虑函数$h(z)$：$\dfrac{f(z)-\omega}{1-\bar{\omega}f(z)}=\dfrac{z-z_1}{1-\bar{z}_1 z}\cdot\dfrac{z-z_2}{1-\bar{z}_2 z}h(z)$．

22．若函数$f(z)$在单位圆$|z|<1$内解析，且$|f(z)|\leqslant 1$，$f(0)=0$，$|f'(0)|=a>0$，则

$$|z|(a-|z|)\leqslant(1-a|z|)|f(z)|.$$

23．若函数$f(z)$在单位圆$|z|<1$内解析，并且$|f(z)|\leqslant 1$，$f(0)=0$，$|f'(0)|=a>0$，则$f(z)$在圆

$$|z|<\rho_0=\frac{a}{1+\sqrt{1-a^2}}$$

内单叶．

提示：由边界对应原理只要证明：若$|z_1|=|z_2|=\rho<\rho_0$，$z_1\neq z_2$，则$f(z_1)\neq f(z_2)$．

24．设函数$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^n$在单位圆$|z|<1$内解析，并且

$|f(z)|\leqslant M$，证明

$$M|a_1|\leqslant M^2-|a_0|^2.$$

提示：考虑圆$|w|<M$到圆$|\zeta|<1$的分式线性变换.

25．设函数$w=f(z)$在单位圆$|z|<1$内解析，并且$|f(z)|<1$，$f(0)=\alpha>0$，证明当$|z|\leqslant r<1$时，

$$|f(z)-w_0|\leqslant\rho,$$

其中

$$w_0=\frac{\alpha(1-|z|)}{1-\alpha^2|z|^2},\qquad \rho=\frac{|z|(1-\alpha^2)}{1-\alpha^2|z|^2}.$$

§3 共形映照的例子

这一节我们将给出一些共形映照的例子，它们都是由初等函数复合而得到的.

例1 将图8-10(a)所示的域G保角地映为上半平面.

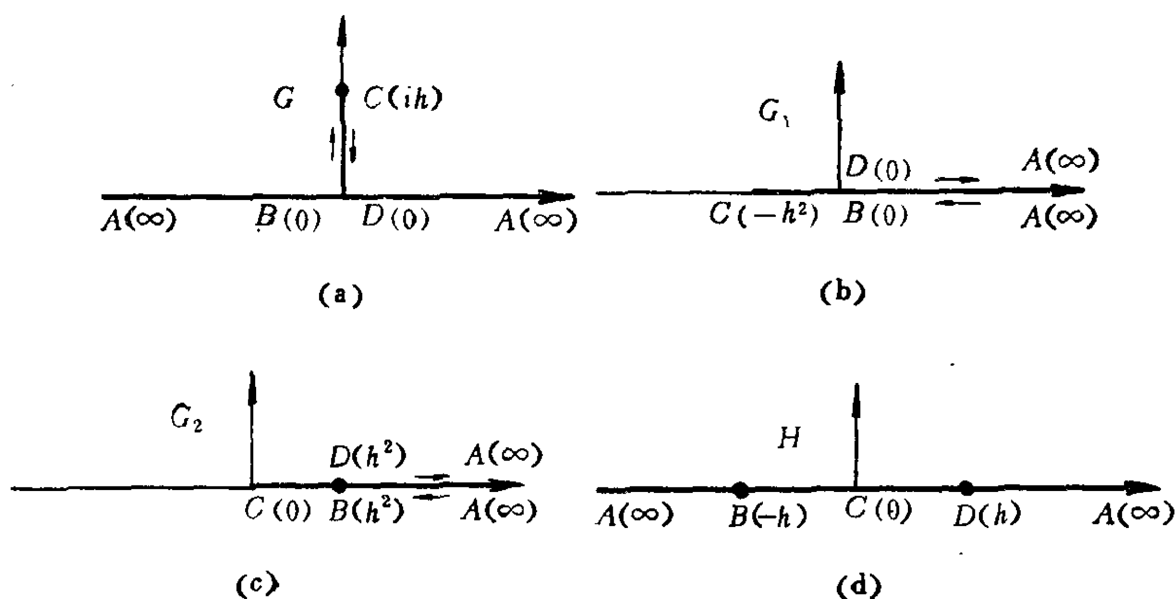


图 8-10

首先利用函数

$$z_1=z^2$$

将上半平面除去线段 $[0, hi]$ 的域 G 映为 z_1 平面上除去实轴上 $[-h^2, +\infty)$ 的域 G_1（图8-10(b)）。映照在 G 内是保角的。然后，作平移变换

$$z_2 = z_1 + h^2.$$

它把 G_1 保角地映为除去正实轴的域 G_2（图8-10(c)），最后，变换

$$w = \sqrt{z_2}$$

将 G_2 保角地映为上半平面，这里根式函数是使 $\sqrt{-1} = i$ 的那个分支。所以，函数

$$w = \sqrt{z^2 + h^2}$$

将 G 保角地映为上半平面 H。

例 2 将图8-11(a)所示的域 G 保角地映为上半平面。

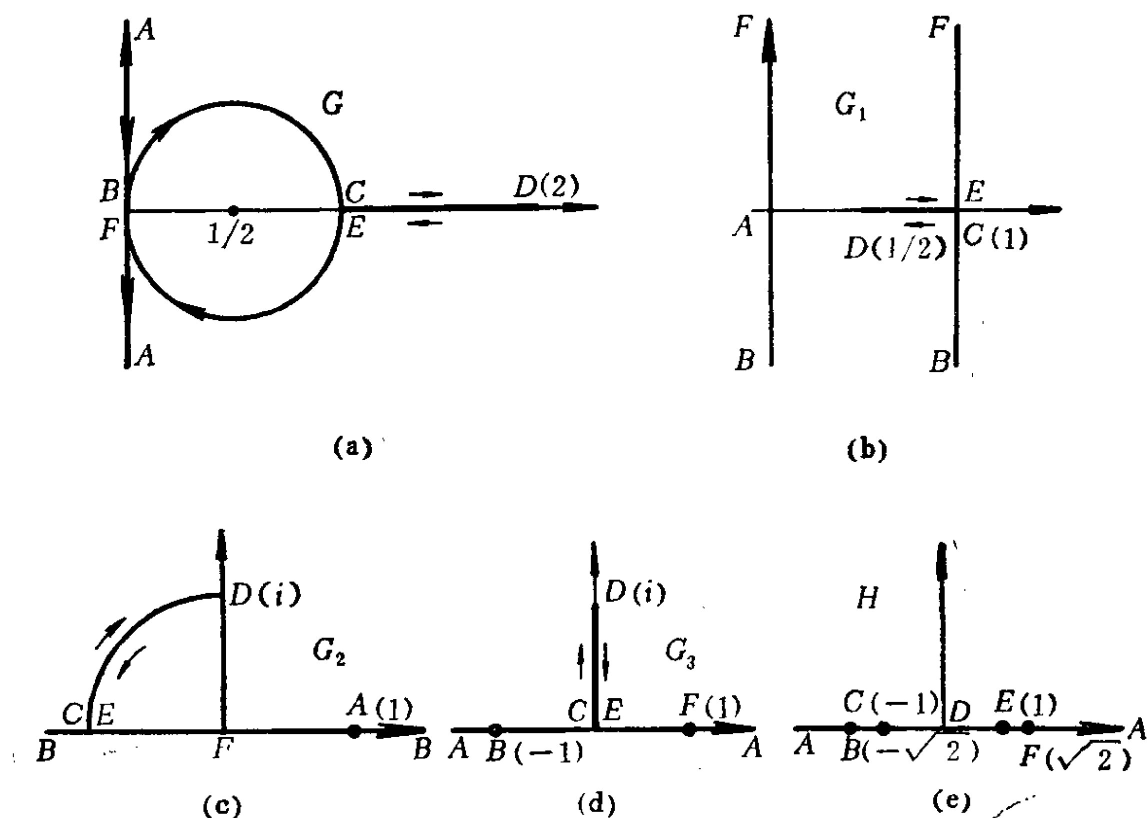


图 8-11

首先作变换

$$z_1 = \frac{1}{z},$$

它把虚轴仍变为虚轴，把线段 [1，2] 变为线段 [1/2，1]. 又将 $z_1 = 1/z$ 代入 $|z-(1/2)|=1/2$ 得到

$$\left|\frac{1}{z_1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}, \qquad \left|\frac{z_1 - 2}{z_1}\right| = 1.$$

这是到点 $z_1 = 0$ 与点 $z_1 = 2$ 等距离的一条直线 $\mathrm{Re}\, z_1 = 1$. 所以变换 $z_1 = 1/z$ 把 G 变为带域 $0 < \mathrm{Re}\, z_1 < 1$ 内除去 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 的域 G_1（图8-11(b)). 然后用指数函数

$$z_2 = e^{\pi i z_1}$$

把 G_1 映为上半平面除去一圆弧的域 G_2（图8-11(c)). 接着利用上半平面到上半平面的分式线性变换

$$z_3 = \frac{1+z_2}{1-z_2}$$

把 G_2 变为上半平面除去虚轴上的线段 $[0, i]$ 的域 G_3（图8-11(d)). 最后，用函数（由例 1）

$$w = \sqrt{z_3^2 + 1}$$

把 G_3 保角地映为上半平面 H（图8-11(e)). 复合上述各函数得到，函数

$$w = \frac{\sqrt{2\left(e^{\frac{2\pi i}{z}} + 1\right)}}{1 - e^{\frac{\pi i}{z}}}$$

把 G 保角地映为上半平面 H.

例 3 将圆周 $|z|=1$ 和 $|z-1|=5/2$ 所范围的域 G（图8-12）保角地映为圆环 $1<|w|<R$.

首先求出关于圆周 $|z|=1$ 和 $|z-1|=5/2$ 都对称的两点

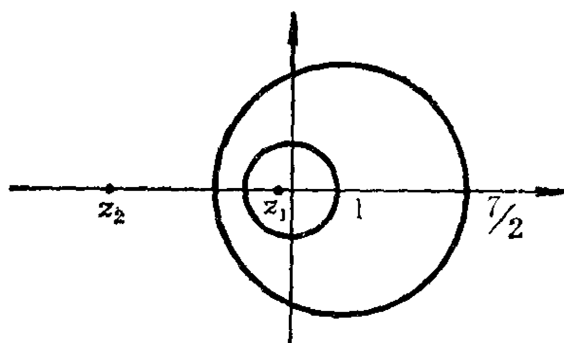


图 8-12

z_1, z_2. 因为这两个圆的圆心都在实轴上，所以z_1, z_2两点也在实轴上. 按照关于圆周两点对称的定义，有

$$\begin{cases} z_1 z_2 = 1, \\ (z_1 - 1)(z_2 - 1) = \left(\dfrac{5}{2}\right)^2. \end{cases}$$

由此解出$z_1 = -1/4$，$z_2 = -4$. 根据§2的公式(10)，圆周$|z| = 1$的圆心

$$a = \frac{z_1 - k^2 z_2}{1 - k^2} = 0,$$

由此得到 $k = \dfrac{1}{4}$，所以单位圆周 $|z| = 1$ 可以写成$\left|\dfrac{z + (1/4)}{z + 4}\right| = \dfrac{1}{4}$. 同理圆周 $|z - 1| = \dfrac{5}{2}$ 可以写成$\left|\dfrac{z + (1/4)}{z + 4}\right| = \dfrac{1}{2}$. 因此分式线性变换

$$w = 4\frac{z + \dfrac{1}{4}}{z + 4} e^{i\theta} = \frac{4z + 1}{z + 4} e^{i\theta} \text{（}\theta\text{是一实常数）}$$

将圆周 $|z| = 1$映为圆周 $|w| = 1$，圆周 $|z - 1| = 5/2$ 映为圆周$|w| = 2$，将G保角地映为圆环 $1 < |w| < 2$.

以上是把z_1变为原点，把z_2变为∞。我们也可以把 z_2变为原点，把z_1变为∞（即$z_1 = -4$，$z_2 = -1/4$），则所求的变换为

$$w = \frac{z + 4}{2\left(z + \dfrac{1}{4}\right)} e^{i\theta} = \frac{2(z + 4)}{4z + 1} e^{i\theta}.$$

这时圆周$|z|=1$变为圆周$|w|=2$，圆周$|z-1|=5/2$变为圆周$|w|=1$.

例 4 将椭圆$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$的外部保角地映为单位圆的外部.

我们可以利用儒可夫斯基函数，首先用线性变换

$$\zeta=\frac{1}{3}z$$

把椭圆的焦点变为±1. 椭圆$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$变为椭圆

$$\frac{\xi^2}{\left(\frac{5}{3}\right)^2}+\frac{\eta^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2}=1,$$

它的焦点在$\zeta=\pm1$. 我们已知

$$\zeta=\frac{1}{2}\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)$$

将$|\omega|=r$（$r>1$）的外部映为椭圆

$$\frac{\xi^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\right]^2}+\frac{\eta^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\right]^2}=1$$

的外部，所以若令

$$\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)=\frac{5}{3},\qquad \frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)=\frac{4}{3},$$

那么由此得到$r=3$，即$\zeta=\frac{1}{2}\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)$把$|\omega|=3$的外部保角地映为椭圆

$$\frac{\xi^2}{\left(\frac{5}{3}\right)^2}+\frac{\eta^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2}=1$$

的外部. 反函数 $\omega=\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}$（它的一个分支）把这个椭圆的外部保角地映为圆周$|\omega|=3$的外部. 于是函数

$$w=\frac{1}{3}\omega=\frac{1}{3}(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})=\frac{1}{9}(z+\sqrt{z^2-9})$$

把椭圆$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$的外部保角地映为$|w|=1$的外部.

例 5 将圆$|z-1|<2$和圆$|z+1|<2$的公共部分G（图8-13(a)）保角地映为上半平面.

圆周$|z-1|=2$和圆周$|z+1|=2$的交点是$z=\pm\sqrt{3}i$. 用分式线性变换

$$\zeta=\frac{z-\sqrt{3}i}{z+\sqrt{3}i}$$

将圆周$|z-1|=2$变为直线L_1，圆周$|z+1|=2$变为直线L_2，将G保角地变为角域G_1（图8-13(b)）.

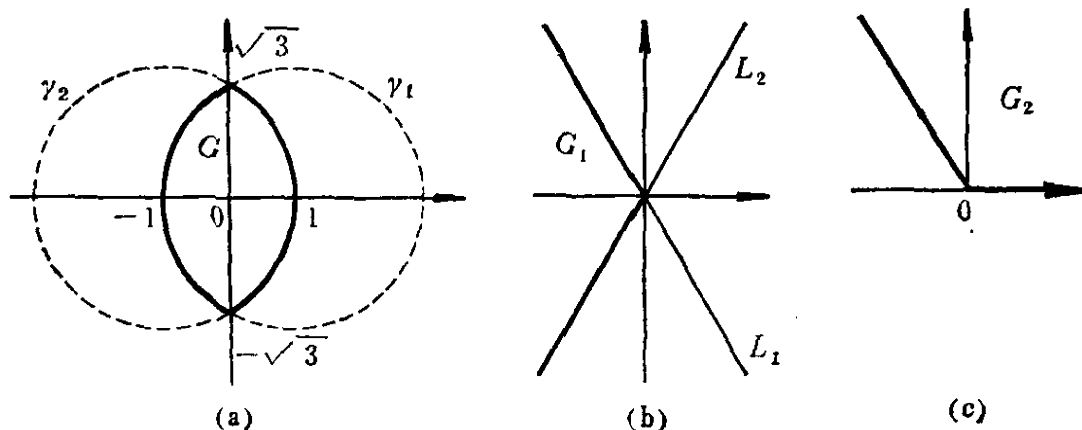


图 8-13

作旋转变换

$$\omega = e^{-\frac{2\pi i}{3}}\zeta.$$

它将G_1变为角域G_2：$0<\arg\omega<2\pi/3$（图8-13(c)）．最后，用幂函数

$$w = \omega^{\frac{3}{2}}$$

将G_2保角地变为上半平面．复合上述各函数，得到

$$w = -\left(\frac{z-\sqrt{3}i}{z+\sqrt{3}i}\right)^{\frac{3}{2}}$$

将G保角地映为上半平面．

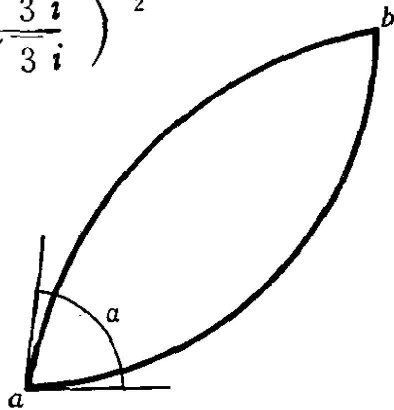


图 8-14

一般地说，对于图8-14所示的由两圆弧（夹角$\alpha>0$）所范围的月牙形，我们可用分式线性变换$(z-a)/(z-b)$及幂函数将它保角地映为上半平面．

例 6 将单位圆$|z|<1$内去掉$[1/2,1)$的域G（图8-15(a)）保角地映为上半平面．

先作分式线性变换

$$\zeta = \frac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z} = \frac{2z-1}{2-z},$$

把G保角地映为单位圆内除去线段$[0,1)$的域G_1(图8-15(b))．然后作根式变换

$$\omega = \sqrt{\zeta},$$

把G_1映为上半单位圆G_2（图8-15(c)）．再作变换

$$\omega_1 = \frac{1+\omega}{1-\omega},$$

把上半单位圆G_2保角地变为第一象限G_3(图8-15(d)). 最后，变换

$$w=\omega_1^2$$

把G_3保角地映为上半平面H(图8-15(e)). 复合这些变换，得到

$$w=\left(\frac{1+\sqrt{\dfrac{2z-1}{2-z}}}{1-\sqrt{\dfrac{2z-1}{2-z}}}\right)^2$$

把G保角地映为上半平面H.

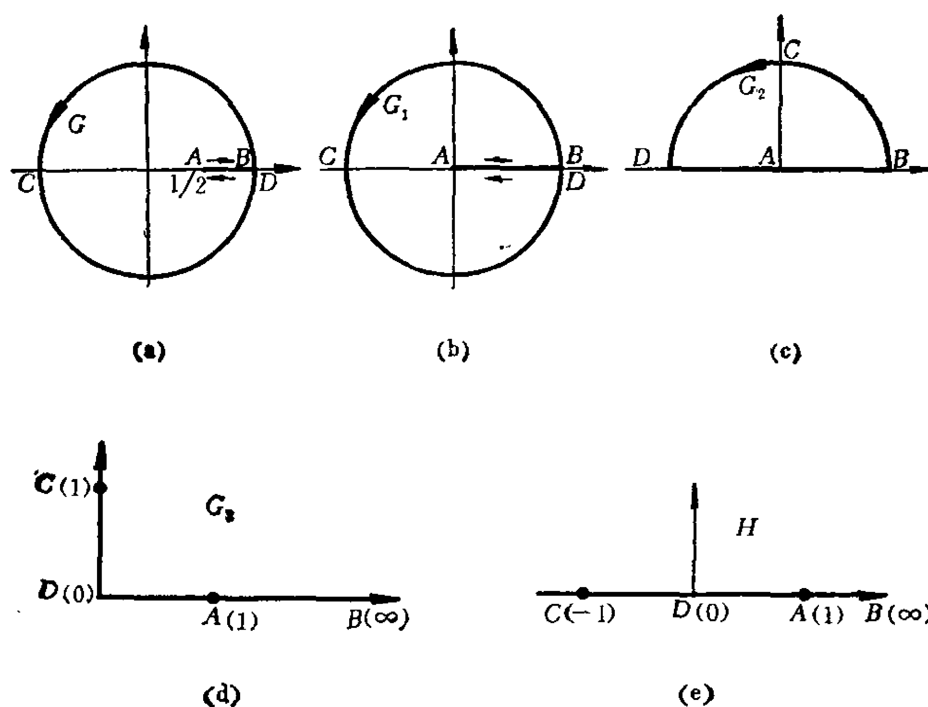


图 8-15

注意，我们可以用儒可夫斯基函数将G_1或G_2变为例 1 中G_1那样的域，然后再变为上半平面.

我们也可以采用以下步骤：先作变换

$$\zeta=\frac{1-z}{1+z},$$

把 G 映为右半平面上除去线段(0,1/3]的域 G_1 (图8-16(a)). 然

后作变换

$$\omega = \zeta^2,$$

把G_1变为G_2(图8-16(b)). 最后作变换

$$W = i\sqrt{\omega - \frac{1}{9}},$$

把G_2变为上半平面H(图8-16(c)). 复合这些变换，得到

$$W = \frac{2i}{3(1+z)}\sqrt{(2z-1)(z-2)},$$

把G保角地映为上半平面.

我们用两种不同的方法实现G到H的共形映照. 这两个映照只相差一个上半平面到上半平面的分式线性变换. 这个变换把实轴变为实轴，实轴上的$1, \infty, -1$分别变为$0, 1/3, \infty$. 由上节(15)式，这个变换是

$$W = \frac{1}{3} \cdot \frac{w-1}{w+1}.$$

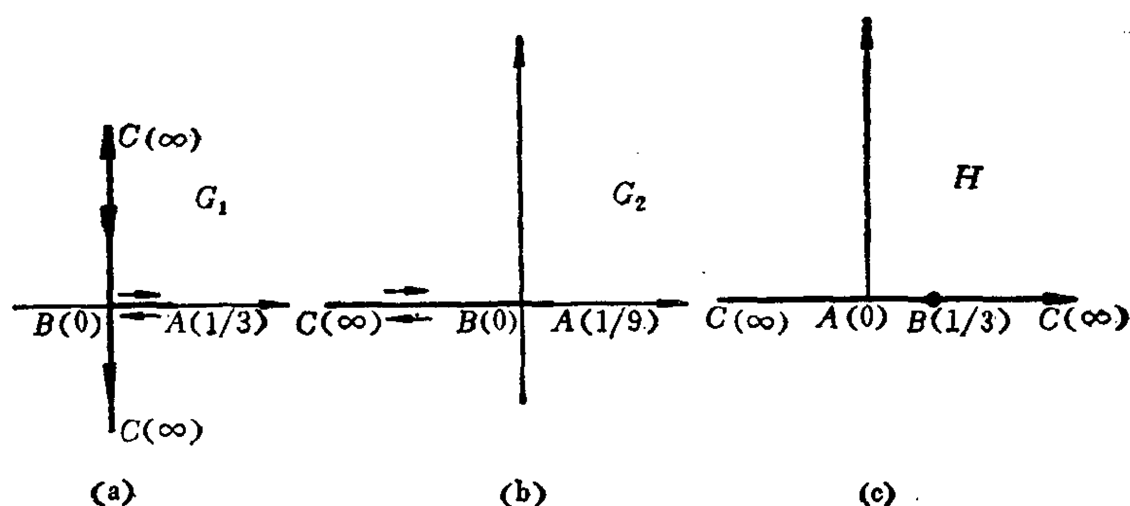


图 8-16

如果我们将前一变换

$$w=\left(\frac{1+\sqrt{\dfrac{2z-1}{2-z}}}{1-\sqrt{\dfrac{2z-1}{2-z}}}\right)^2$$

代入上式就得到后一个变换

$$W=\frac{2i}{3(1+z)}\sqrt{(2z-1)(z-2)}\,.$$

例 7 将z平面上除去线段$-a\leqslant x\leqslant a$，$y=0$及$-a\leqslant y\leqslant a$，$x=0$的域G（图8-17(a)）保角地映为单位圆外.

设G在上半平面和下半平面的部分分别是D, D'，在实轴上$x>a$，和$x<-a$的部分分别为S_1, S_2. 由例 1，函数

$$\zeta=\frac{1}{\sqrt{2}\,a}\sqrt{z^2+a^2}$$

(一个分支)把D保角地映为上半平面D_1. 把S_1, S_2分别映为T_1，T_2，这里T_1，T_2分别是实轴上的$(1, +\infty)$和$(-\infty, -1)$（图8-17

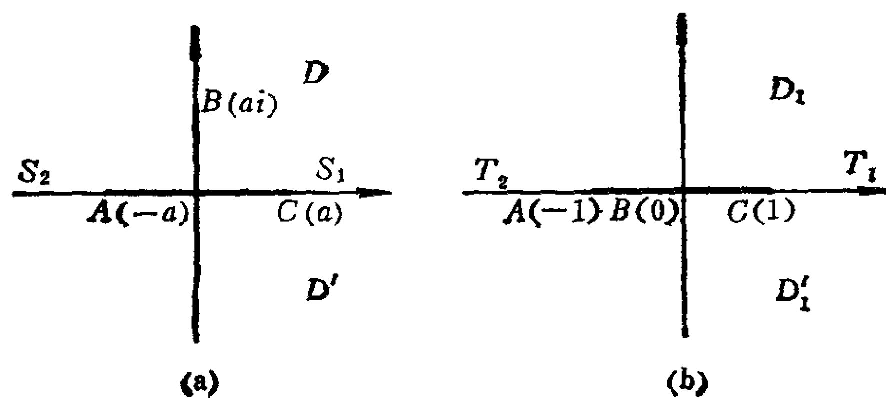


图 8-17

(b)). 不难看出，当点z从D内趋于S_1或S_2上的点时，点ζ从D_1内相应地趋于T_1或T_2上的点，即上述函数连续到边界S_1和S_2上，

且S_1与T_1上的点是一一对应的；S_2与T_2上的点是一一对应的．由对称原理，我们得到函数$\zeta=h(z)$满足以下两个条件：1）$h(z)$在域$D\cup D'\cup S_1\cup S_2$内单叶解析，并且把这个域共形映照为平面上除去实轴上的线段[-1,1]的域$H=D_1\cup D_1'\cup T_1\cup T_2$，这里$D_1'$是下半平面；2）在$D$内，$h(z)=\frac{1}{\sqrt{2}a}\sqrt{z^2+a^2}$．

最后，利用儒可夫斯基函数的反函数

$$w=\varphi(\zeta)=\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}$$

（一个分支）把H共形映照为单位圆外，于是复合函数

$$w=\varphi(h(z))$$

把G共形映照为单位圆外$|w|>1$．

习　　题

1．　求出将偏心圆环$|z-3|>9$，$|z-8|<16$映为同心圆环$R<|w|<1$的分式线性变换，问$R=?$

2．　试将图8-18所示的域D共形映照为同心圆环$\rho<|w|<1$，并且证明

$$\rho=\frac{h}{R}-\sqrt{\left(\frac{h}{R}\right)^2-1}.$$

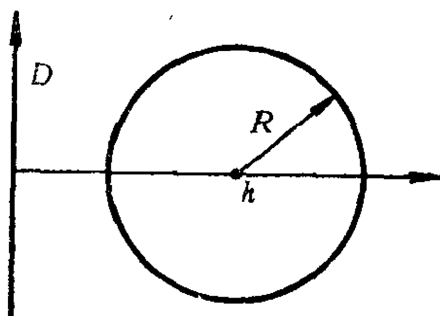


图　8-18

3．　试将椭圆$4x^2+5y^2=20$的内部除去$y=0$，$-1\leqslant x\leqslant 1$的域共形映照为圆环$1<|w|<\rho$，求出ρ的值．

4．　试将椭圆环$2\sqrt{5}<|z-2|+|z+2|<6$共形映照为圆环$R_1<|w|<R_2$，求R_1/R_2的值．

5．　试将图8-19所示的域D共形映照为上半平面．

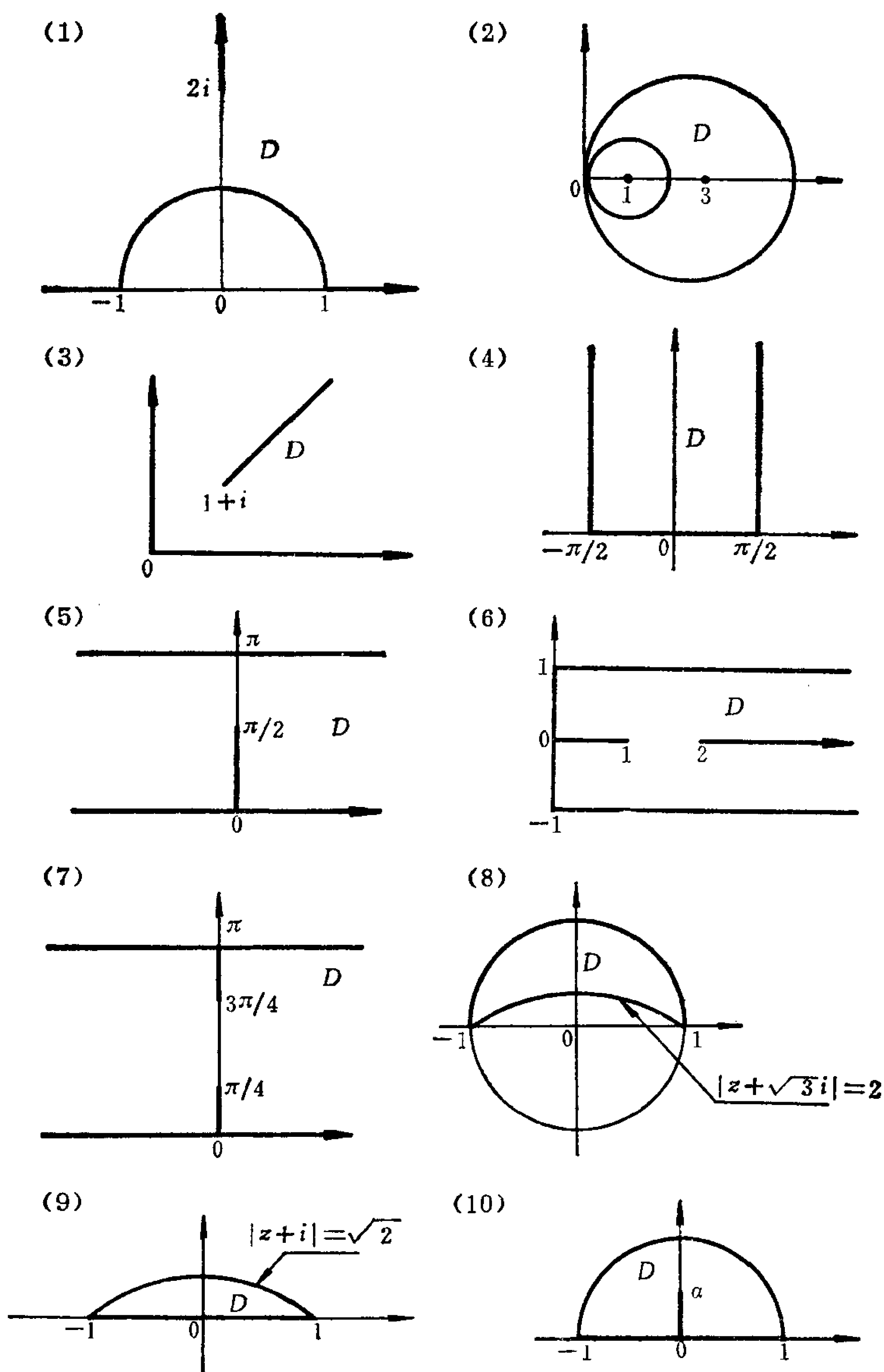

(1)
2i
D
−1
0
1
(2)
D
0
1
3
(3)
D
1+i
0
(4)
D
−π/2
0
π/2
(5)
π
π/2
D
0
(6)
1
D
0
1
2
−1
(7)
π
D
3π/4
π/4
0
(8)
D
−1
0
1
|z+√3 i|=2
(9)
|z+i|=√2
D
−1
0
1
(10)
D
a
−1
0
1

图 8-19

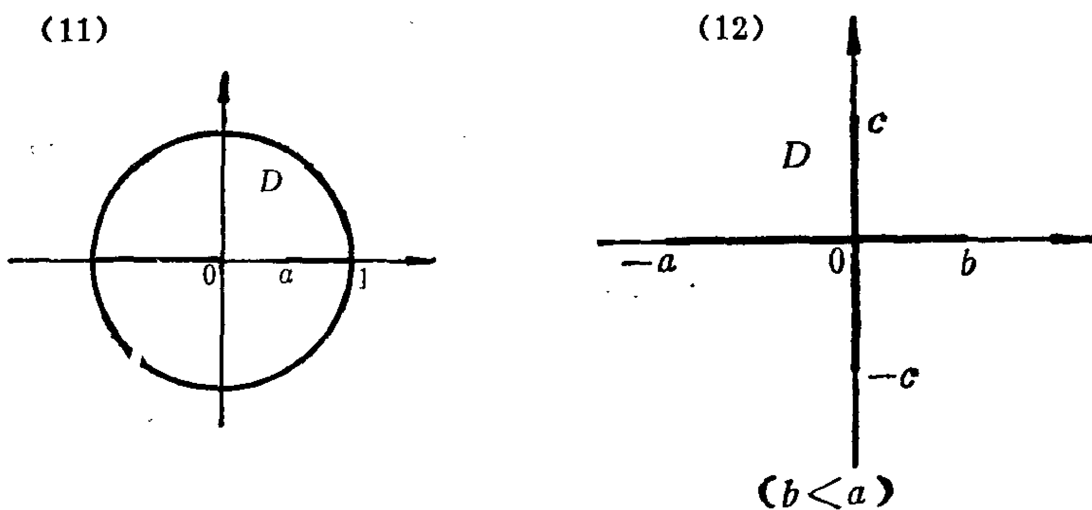


图 8-19

6. 试将图8-20所示的域D共形映照为单位圆.

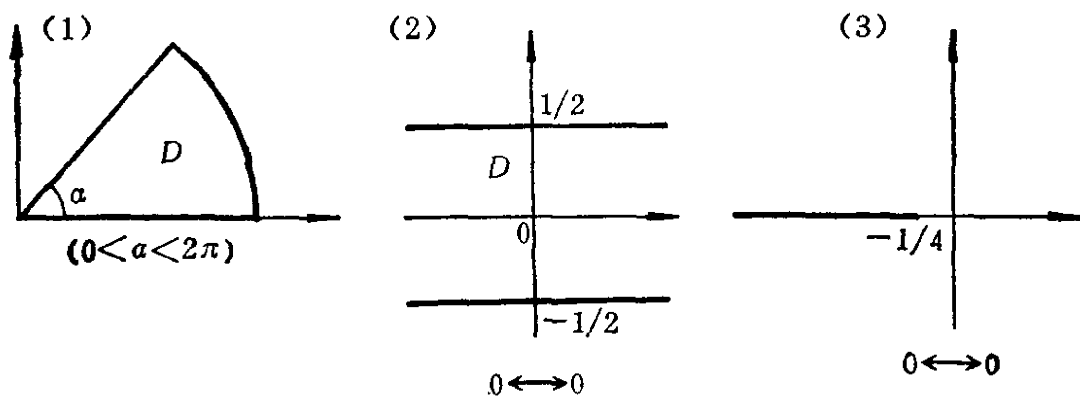


图 8-20

7. 试将图8-21所示的域D共形映照为单位圆外.

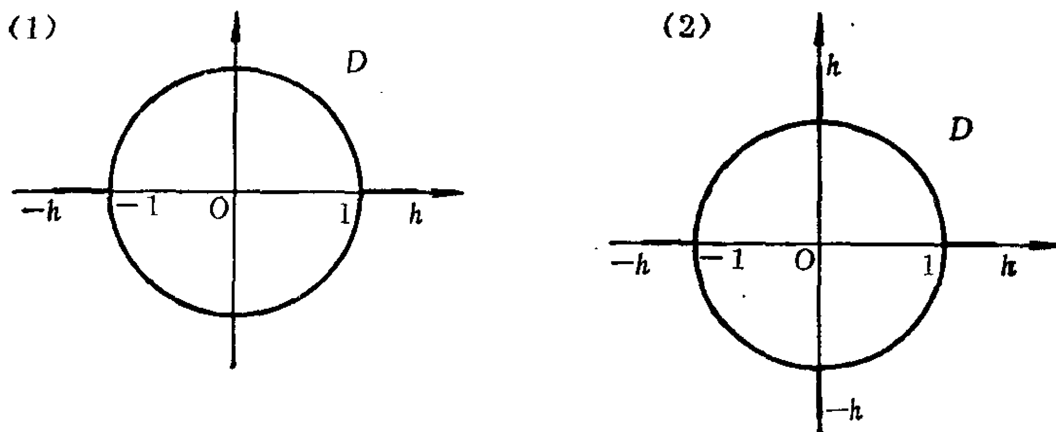


图 8-21

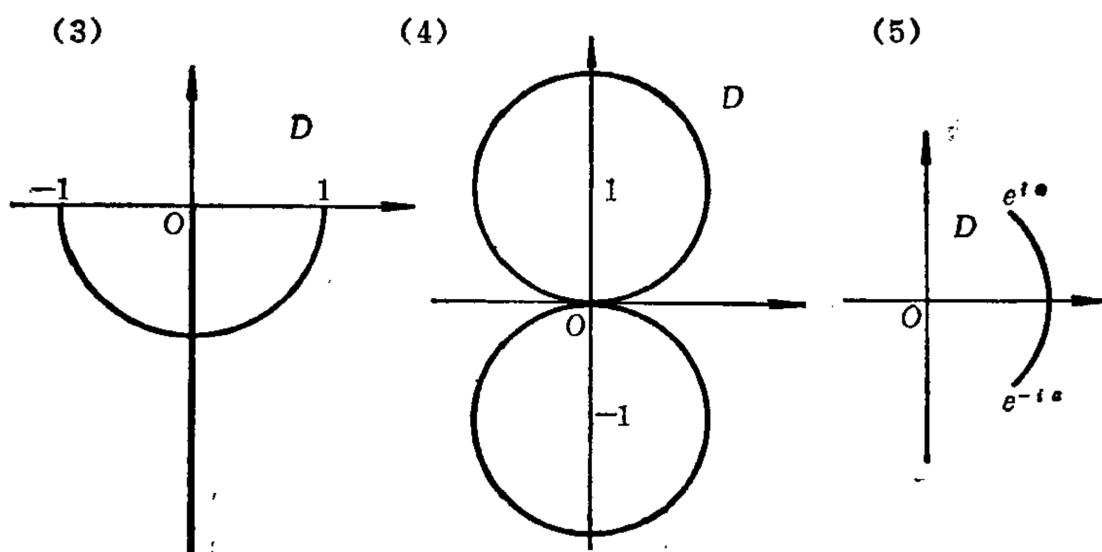


图 8-21

§4 Riemann存在定理与边界对应

1. Montel定理

设函数序列 $f_n(z)(n=1,2,3,\cdots)$ 定义在域 D 内．若对于D内的任意有界闭域$\overline{d}$，$f_n(z)$在$\overline{d}$上是一致有界的，即存在一正数M（与$\overline{d}$有关），使得$|f_n(z)|\leqslant M$在$\overline{d}$上对于一切n成立，则称$f_n(z)$在D内闭一致有界．显然，它弱于$f_n(z)$在D内一致有界．

定理1 若1）函数序列 $f_n(z)(n=1,2,3,\cdots)$ 在域 D 内解析，在D内闭一致有界；2）点集A在D内稠密，$f_n(z)$在A上收敛，则$f_n(z)$在D内闭一致收敛．

证明 设$\overline{d}$是D内任一有界闭域，ρ是$\overline{d}$与D的边界的距离．又设$E=\{z: d(z,\overline{d})\leqslant\rho/2\}$，显然$E$是有界闭域，$\overline{d}\subset E\subset D$．由假定1）知道，$f_n(z)$在$E$上一致有界，$|f_n(z)|\leqslant M$．设点$z_1$，$z_2\in\overline{d}$，且$|z_1-z_2|<\frac{\rho}{4}$；$\gamma$是圆周$|\zeta-z_1|=\rho/2$．显然，$\gamma$的

内部属于E. 由Cauchy公式得到

$$|f_n(z_1)-f_n(z_2)|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_1}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_2}d\zeta\right|$$

$$=\frac{1}{2\pi}|z_1-z_2|\left|\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)}d\zeta\right|.$$

因为当ζ在γ上时,

$$|\zeta-z_2|=|(\zeta-z_1)-(z_2-z_1)|\geqslant|\zeta-z_1|-|z_1-z_2|\geqslant\frac{\rho}{4},$$

所以

$$|f_n(z_1)-f_n(z_2)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{\frac{\rho}{2}\cdot\frac{\rho}{4}}\cdot 2\pi\cdot\frac{\rho}{2}\cdot|z_1-z_2|$$

$$=\frac{4M}{\rho}|z_1-z_2|.$$

于是,对于任给 $\varepsilon>0$,若取 $\delta=\min\left(\frac{\rho}{4},\frac{\rho\varepsilon}{4M}\right)$, 那么当$z_1$, z_2 $\in\overline{d}$, 且$|z_1-z_2|<\delta$时,对于任意的n,有

$$|f_n(z_1)-f_n(z_2)|<\varepsilon \tag{18}$$

(称$f_n(z)$在$\overline{d}$上等度连续).

在 z 平面上作边平行于坐标轴的正方形网眼,其边长为 $\delta/2$ (图8-22). 由于 $\overline{d}$ 是有界闭域,所以含有 $\overline{d}$ 的点的网眼是有穷多个. 设它们是$\overline{d}_1,\overline{d}_2,\cdots,\overline{d}_p$. 在每一个 $\overline{d}_k$上的任意两点 z_1, z_2, 有$|z_1-z_2|<\sqrt{2}\cdot\frac{\delta}{2}<\delta$. 由于$A$在$D$内是稠密的,所以在每一个$\overline{d}_k$ $(1\leqslant k\leqslant p)$ 上必有A的一点 z_k, $f_n(z)$ 在点z_k处是收敛的. 因此,存在正整数N, 使得当 $m,n>N$时,对于所有的z_k $(1\leqslant k\leqslant p)$, 有

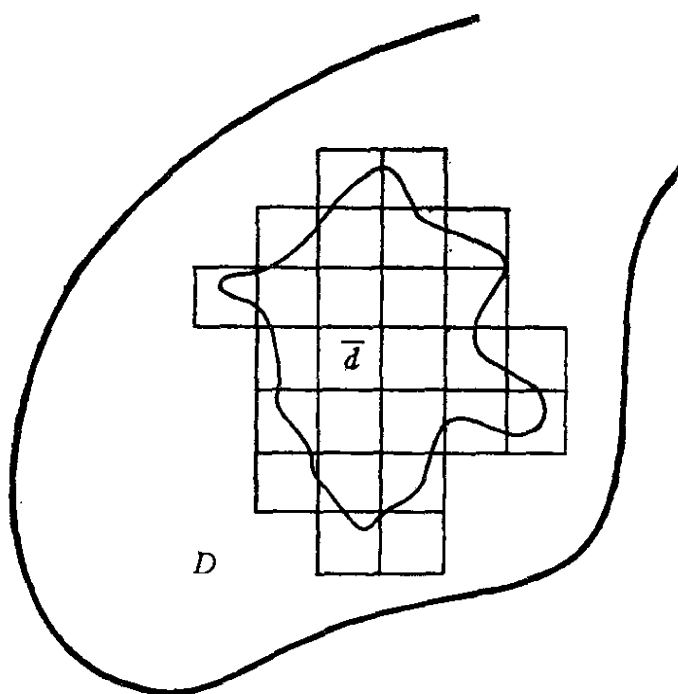


图 8-22

$$|f_n(z_k)-f_m(z_k)|<\varepsilon.$$

现在设z是$\bar{d}$上的任意一点，它必属于某一个$\bar{d}_k$. 由（18）式，对任意的m,n，有

$$|f_n(z)-f_n(z_k)|<\varepsilon,\quad |f_m(z)-f_m(z_k)|<\varepsilon.$$

于是当$m,n>N$时，有

$$|f_n(z)-f_m(z)|\leqslant|f_n(z)-f_n(z_k)|+|f_n(z_k)-f_m(z_k)|$$
$$+|f_m(z_k)-f_m(z)|<3\varepsilon.$$

由于N只与ε有关，与z无关，所以$f_n(z)$在$\bar{d}$上一致收敛. 故$f_n(z)$在D内闭一致收敛. 定理证毕.

定理 2（Montel）若函数序列$f_n(z)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 在域D内解析，并且在D内闭一致有界，则必有$f_n(z)$的子序列$f_{n_k}(z)$ $(k=1,2,3,\cdots)$ 在D内闭一致收敛.

由Weierstrass定理，这个子序列的极限函数在D内解析.

证明 设R是D内所有的有理点（即实部和虚部都是有理 数

的点)作成的点集，R在D内是稠密的．R是可列点集，记作z_1，$z_2,z_3,\cdots$．由定理1，我们只要从$f_n(z)$ ($n=1,2,3,\cdots$)中选一个在点$z_1,z_2,z_3,\cdots$处收敛的子序列．因为$f_n(z_1)$ ($n=1,2,3,\cdots$) 是有界的，而无穷有界序列至少有一个极限点（第二章§1的 Bolzano-Weierstrass定理)，所以有$f_n(z)$ ($n=1,2,3,\cdots$) 的子序列

$$S_1:\ f_{n_1}^{(1)}(z),\ f_{n_2}^{(1)}(z),\ \cdots,$$

它在点$z=z_1$是收敛的.同理，$f_{n_k}^{(1)}(z)(k=1,2,3,\cdots)$在点$z=z_2$是有界的，所以从$S_1$中可选出子序列

$$S_2:\ f_{n_1}^{(2)}(z),\ f_{n_2}^{(2)}(z),\cdots,$$

它在点$z=z_2$是收敛的(当然S_2在点$z=z_1$也是收敛的)．一般地，从S_{p-1}中可选出子序列

$$S_p:\ f_{n_1}^{(p)}(z),\ f_{n_2}^{(p)}(z),\cdots,$$

它在$z=z_1,z_2,\cdots,z_p$是收敛的．如此继续下去得到一串函数序列

$$\begin{array}{l}
f_{n_1}^{(1)}(z),\ f_{n_2}^{(1)}(z),\ \cdots,\ f_{n_k}^{(1)}(z),\cdots \\
f_{n_1}^{(2)}(z),\ f_{n_2}^{(2)}(z),\ \cdots,\ f_{n_k}^{(2)}(z),\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f_{n_1}^{(p)}(z),\ f_{n_2}^{(p)}(z),\ \cdots,\ f_{n_k}^{(p)}(z),\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array} \tag{19}$$

其中后一个序列是前一个序列的子序列，第 p个 序 列 在点z_1，$z_2,\cdots,z_p$是收敛的．现在我们取“对角线序列”如下

$$f_{n_1}^{(1)}(z),\ f_{n_2}^{(2)}(z),\ \cdots,\ f_{n_k}^{(k)}(z),\cdots, \tag{20}$$

那么，它在点$z=z_k$ ($k=1,2,3,\cdots$) 是收敛的，这是因为对于任意一个z_p，序列(20)从 p 项起是(19)中第p个序列的子序列．由

定理1知，序列(20)在D内闭一致收敛．定理证毕．

2. Riemann存在定理

在§1 里我们证明了一个解析函数把域映为另一个域，并且如果这个函数是单叶的，那么它是保角的．在第二章我们曾经研究过一些初等函数所构成的共形映照．但是，作为共形映照理论的基本问题是这个问题的反问题，即给定两个域D和G，是否存在一个单叶解析函数把D保角地映为G？

如果D是单连通域，$w=f(z)$是D内任意一个单叶解析函数，那么$f(D)$也是单连通域．事实上，设Γ是$f(D)$内的任意可求长简单闭曲线．$f(z)$的反函数$z=g(w)$把Γ映为D内的可求长的简单闭曲线γ．D是单连通域，γ的内部属于D．$f(z)$将γ映为$f(D)$内的Γ．由边界对应原理，$w=f(z)$将γ的内部映为Γ的内部，所以Γ的内部属于$f(D)$，故$f(D)$是单连通域．

下面我们只限考虑两个单连通域之间的共形映照．不失一般性，我们可以设其中的一个是以原点为圆心的单位圆．事实上，如果任意一个单连通域可以共形映照为单位圆，那么任意两个单连通域就可以互为共形映照，因为根据§1的定理3，共形映照的逆映照也是共形映照．但是，若D是有穷复平面**C**，显然不可能将它共形映照为单位圆，这是一种例外情形．事实上，如果有这样的共形映照$w=f(z)$存在，那么$|f(z)|<1$．由Liouville定理，$f(z)$必是常数．因而它就不可能把**C**共形映照为单位圆$|w|<1$．

定理 3（Riemann） 若D是z平面上的单连通域，且不是有穷复平面**C**，z_0是D内一点，θ_0是一实数($0\leqslant\theta_0<2\pi$)，则存在一个函数$w=f(z)$，满足以下条件

1） $w=f(z)$在D内单叶解析，它把D保角地映为单位圆$|w|<1$，且$f(z_0)=0$；

2） $\arg f'(z_0)=\theta_0$．

这样的函数$f(z)$是唯一的．

容易看出，仅仅满足条件 1）的函数 $w=f(z)$不是唯一的，因若$w=f(z)$ 满足条件1），那么$w=e^{i\alpha}f(z)$ 也满足条件1），这里α是任意实数.条件2)在于保证函数$f(z)$的唯一性. 由导数幅角的几何意义，条件2)表示：如果γ是一曲线，它过点z_0且与平行于实轴的射线 z_0x'的夹角为$-\theta_0$，那么 $w=f(z)$将γ映为过点 $w=0$，且与实轴 Ou相切的曲线Γ（图8-23）. 不失一般性，我们可以假定$\theta_0=0$. 事实上，若$f(z)$在D内单叶解析，把D保角地映为单位圆$|w|<1$，并且 $f(z_0)=0$，$f'(z_0)>0$，那么$w=e^{i\theta_0}f(z)$就满足定理 3 中的条件 1)与 2).

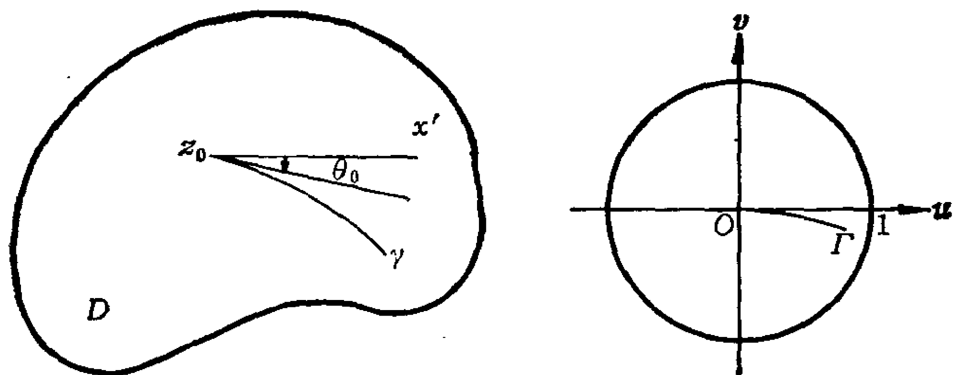


图 8-23

定理 3 的证明 存在性的证明分以下三个步骤.

1） 证明存在D内的单叶解析函数$\zeta=\varphi(z)$，把 D保角地映为位于单位圆$|\zeta|<1$ 内的单连通域G，且$\varphi(z_0)=0$.

首先，我们注意到存在点$a\neq\infty$，a不属于D. 因若仅有∞不属于 D，那么$D=\mathbb{C}$，这与假设不符. 取多值函数$\sqrt{z-a}$的一个分支

$$g(z)=\sqrt{z-a},\tag{21}$$

它在D内解析. 若z_1,z_2是D内的两点，使得

$$g(z_1)=g(z_2),\qquad \text{即}\qquad \sqrt{z_1-a}=\sqrt{z_2-a},$$

上式平方后得到$z_1=z_2$．因此$g(z)$把D单叶地变为E．

此外，若点$u\in E$，则$-u\bar{\in} E$．事实上，若不然，$-u\in E$，则

$$u=\sqrt{z_1-a},\qquad -u=\sqrt{z_2-a},$$

其中z_1,z_2是D内的两点．同样，两式平方后得到$z_1=z_2$．于是$u=-u$，$u=0$，这是不可能的，因为$g(z)\neq 0$．

由于E是一开集，所以存在点$g(z_0)$的邻域属于E．假设闭圆$|u-g(z_0)|\leqslant r$属于E．按上面证明的事实，闭圆$|u+g(z_0)|\leqslant r$完全不属于E．即点$-g(z_0)$是E的外点，圆周$|u+g(z_0)|=r$在E的外部．因此$|g(z)+g(z_0)|>r$．特别地，$2|g(z_0)|>r$．现令

$$\zeta=\varphi(z)=\frac{r}{4|g(z_0)|}\cdot\frac{g(z)-g(z_0)}{g(z)+g(z_0)}.\qquad (22)$$

显然$\varphi(z_0)=0$，$\varphi(z)$在D内单叶解析，且

$$|\varphi(z)|=\frac{r}{4}\left|\frac{1}{g(z_0)}-\frac{2}{g(z)+g(z_0)}\right|$$

$$\leqslant\frac{r}{4}\left(\frac{1}{|g(z_0)|}+\frac{2}{|g(z)+g(z_0)|}\right)$$

$$<\frac{r}{4}\left(\frac{2}{r}+\frac{2}{r}\right)=1.$$

所以$\varphi(z)$把D保角地映为单位圆内的域G．

2） 考虑以下极值问题：设$\mathfrak{M}$是满足下述条件的函数族$\{\psi(\zeta)\}$：$\psi(\zeta)$在域G内单叶解析，$|\psi(\zeta)|<1$，$\psi(0)=0$，$\psi'(0)>0$．

$\mathfrak{M}$是非空的，因为$\psi(\zeta)=h\zeta$（$0<h\leqslant 1$）属于$\mathfrak{M}$．以下证明在$\mathfrak{M}$中存在一函数$\psi_0(\zeta)$，使得$\psi_0'(0)$在$\mathfrak{M}$中为最大，即对于$\mathfrak{M}$

中的任意函数$\psi(\zeta)$，有$\psi_0'(0)\geqslant\psi'(0)$．因为点$\zeta=0$属于$G$，所以存在一圆$|\zeta|<r$属于$G$．根据Schwarz引理，对于$\mathfrak{M}$中的任一函数$\psi(\zeta)$，有

$$0<\psi'(0)\leqslant\frac{1}{r}.$$

设

$$\lambda=\sup\psi'(0),\qquad \psi(\zeta)\in\mathfrak{M}.$$

因为函数$\psi(\zeta)=\zeta\in\mathfrak{M}$，所以$\lambda\geqslant1$．由上确界的性质，存在一函数序列$\psi_n(\zeta)\in\mathfrak{M}$ $(n=1,2,3,\cdots)$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n'(0)=\lambda. \tag{23}$$

因为按照$\mathfrak{M}$的定义我们知道$\psi_n(\zeta)$在G内一致有界

$$|\psi_n(\zeta)|<1,$$

所以根据Montel定理，从$\psi_n(\zeta)$可选出子序列$\psi_{n_k}(\zeta)$ $(k=1,2,3,\cdots)$，它在G内闭一致收敛到$\psi_0(\zeta)$．由Weierstrass定理，$\psi_0(\zeta)$在G内解析，且

$$\lim_{k\to\infty}\psi_{n_k}'(0)=\psi_0'(0).$$

由(23)式，得到

$$\psi_0'(0)=\lambda. \tag{24}$$

此外，显然有$\psi_0(0)=0$，$|\psi_0(\zeta)|\leqslant1$，但是根据最大模原理，后一式在$G$内不能取等号，即在$G$内，$|\psi_0(\zeta)|<1$．最后由第五章§2的定理6，$\psi_0(\zeta)$在$G$内单叶．因此$\psi_0(\zeta)\in\mathfrak{M}$．

3）证明$w=\psi_0(\zeta)$把G映为单位圆$|w|<1$．

设$\psi_0(\zeta)$把G映为位于单位圆内的单连通域d．d包含原点$w=0$．若d不是单位圆，则在单位圆$|w|<1$内必有一点$\omega\overline{\in}d$．下面我们将得出一个矛盾．

作分式线性变换

$$t=f_1(w)=\frac{w-\omega}{1-\bar{\omega}w},\quad f_1'(0)=1-|\omega|^2,$$

它把d映为单位圆内的单连通域d_1，把ω映为原点$t=0$，点$w=0$映为d_1内的点$t_0=-\omega$.所以d_1不包含原点$t=0$. 然后函数

$$T=f_2(t)=\sqrt{t},\qquad f_2'(t_0)=\frac{1}{2\sqrt{t_0}}$$

（一个分支）把d_1保角地映为单位圆内的单连通域d_2.d_2不包含原点，但包含点$T_0=\sqrt{t_0}$. 最后，函数

$$\tau=f_3(T)=\frac{T_0}{|T_0|}\cdot\frac{T-T_0}{1-\bar{T}_0T},$$

$$f_3'(T_0)=\frac{T_0}{|T_0|(1-|T_0|^2)},$$

把d_2保角地映为单位圆内的单连通域，把点T_0映为原点$\tau=0$. 于是$\psi_0(\zeta)$与f_1,f_2,f_3的复合函数

$$\tau=\tau(\zeta)$$

在G内单叶解析，且$\tau(0)=0$，$|\tau(\zeta)|<1$，所以$\tau(\zeta)\in\mathfrak{M}$.但是另一方面，

$$\begin{aligned}\tau'(0)&=f_3'(T_0)f_2'(t_0)f_1'(0)\psi_0'(0)\\&=\frac{T_0}{|T_0|(1-|T_0|^2)}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t_0}}\cdot(1-|\omega|^2)\cdot\psi_0'(0)\\&=\frac{1+|\omega|}{2\sqrt{|\omega|}}\cdot\psi_0'(0)>\psi_0'(0).\end{aligned}$$

这就发生矛盾. 因此，函数$\psi_0(\zeta)$把G保角地映为单位圆. 现在，

函数

$$w=f(z)=e^{-i\alpha}\psi_0(\psi(z)),\quad \alpha=\arg\psi'(z_0),$$

就把D保角地映为单位圆$|w|<1$，且$f(z_0)=0$，$f'(z_0)>0$.

唯一性．假如还有另一个函数$f_1(z)$也满足定理的条件 1)与 2)，那么，函数

$$h(w)=f[f_1^{-1}(w)]$$

把单位圆$|w|<1$保角地映为单位圆．因此$h(z)$是分式线性变换

$$h(w)=e^{i\theta}\frac{w-a}{1-\bar{a}w}$$

（§2的习题15）．由于$h(0)=0$，$h'(0)>0$，所以$h(w)=w$，即$f_1(z)=f(z)$．定理证毕．

若$f(z)$是满足 Riemann定理条件的函数，即$f(z)$把单连通域D保角地映为单位圆$|w|<1$，且$f(z_0)=0$，$f'(z_0)>0$，那么

$$F(z)=\frac{f(z)}{f'(z_0)}$$

把D保角地映为圆$|w|<R$．且满足条件

$$F(z_0)=0,\quad F'(z_0)=1.$$

数$R=1/f'(z_0)$称为域D在点z_0的映照半径．

3. 边界对应

在上一段的Riemann定理中，说的是能够建立起单连通域D内的点与单位圆内的点的一个一一对应，沒有涉及域的边界对应情况．一般说来，一个域的边界可能出现很复杂的情形．我们仅限于简单闭曲线所范围的域来证明下述边界对应定理．

定理4 设D是由一条简单闭曲线Γ所范围的域．若函数$w=f(z)$在D内单叶解析，将D映为单位圆$|w|<1$，则$f(z)$可扩充

到Γ上，使得$f(z)$在闭域$\bar{D}$上连续，并且建立起Γ上的点与圆周$|w|=1$上的点的一个一一对应.

证明 1) 首先证明函数$f(z)$在域D内一致连续. 假定$f(z)$在D内不一致连续，则存在某一正数ε_0及D内的两点列z'_n, z''_n $(n=1,2,3,\cdots)$，使得

$$|z'_n - z''_n| < \frac{1}{n}, \qquad |f(z'_n) - f(z''_n)| \geqslant \varepsilon_0$$

$$(n=1,2,3,\cdots).$$

因为序列z'_n $(n=1,2,3,\cdots)$是有界的，所以有它的一个子序列z'_{n_k} $(k=1,2,3,\cdots)$收敛到一点Z. 又因为

$$|z'_{n_k} - z''_{n_k}| \to 0 \quad (k\to\infty),$$

所以z''_{n_k} $(k=1,2,3,\cdots)$ 也收敛到同一点Z. 为简单起见，z'_{n_k}，z''_{n_k}仍记作z'_n，z''_n. 于是有

$$z'_n \to Z, \qquad z''_n \to Z \quad (n\to\infty),$$

$$|f(z'_n) - f(z''_n)| \geqslant \varepsilon_0.$$

点Z必是Γ上的一点. 因为若Z是D内的一点，则当$n\to\infty$时，

$$|f(z'_n) - f(z''_n)| \to |f(Z) - f(Z)| = 0 .$$

这与$|f(z'_n) - f(z''_n)| \geqslant \varepsilon_0$相矛盾.

设$w'_n = f(z'_n)$，$w''_n = f(z''_n)$. 由于w'_n，w''_n的有界性，与上述选取z'_n, z''_n的子序列一样，我们可以设$w'_n \to W'$，$w''_n \to W''$ $(n\to\infty)$. 于是我们有

$$|W' - W''| \geqslant \varepsilon_0,$$

并且W'，W''一定是圆周$|W|=1$上的两点. 事实上，如果W'或W''位于$|w|<1$内，那么由

$$z'_n = g(w'_n), \qquad z''_n = g(w''_n)$$

($g(w)$是$w=f(z)$的反函数)，令$n\to\infty$，得到 $Z = g(W')$或$Z =$

$g(W'')$，这是不可能的，因为Z是Γ上的点.

作一条连续曲线γ，连接点Z与D内的一点z_0，使得除Z点外，γ全在D内（由于Γ是简单闭曲线，这是可能的）. 在单位圆内取两点w_1, w_2，使得线段$\overline{w_1 w'_n}$与$\overline{w_2 w''_n}$的距离大于$\varepsilon_0/2$. 设

$$z_1 = g(w_1), \qquad z_2 = g(w_2).$$

以Z为中心，r为半径作圆周C_r，使得点z_0在其外部（图8-24）. 当点从Z沿γ运动时，首次遇到C_r上的点z^*，然后从z^*出发分别沿C_r的两个方向运动，首次遇到Γ上的两点Z_1, Z_2. 圆弧$\widehat{Z_1 Z_2}$除两端点外都属于D. 圆弧$\widehat{Z_1 Z_2}$与Γ上包含Z的那部分围成的域记作D_r. 当r充分小时，点z_1, z_2在D_r的外部. 设线段$\overline{w_1 w'_n}$，$\overline{w_2 w''_n}$在D内的原像是γ_1, γ_2. 当n充分大时，点z'_n, z''_n属于D_r，γ_1, γ_2与圆弧$\widehat{Z_1 Z_2}$的交点分别为ζ_1, ζ_2. 于是我们有

$$\frac{\varepsilon_0}{2} < | f(\zeta_2) - f(\zeta_1) | = \left| \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f'(z) dz \right|$$

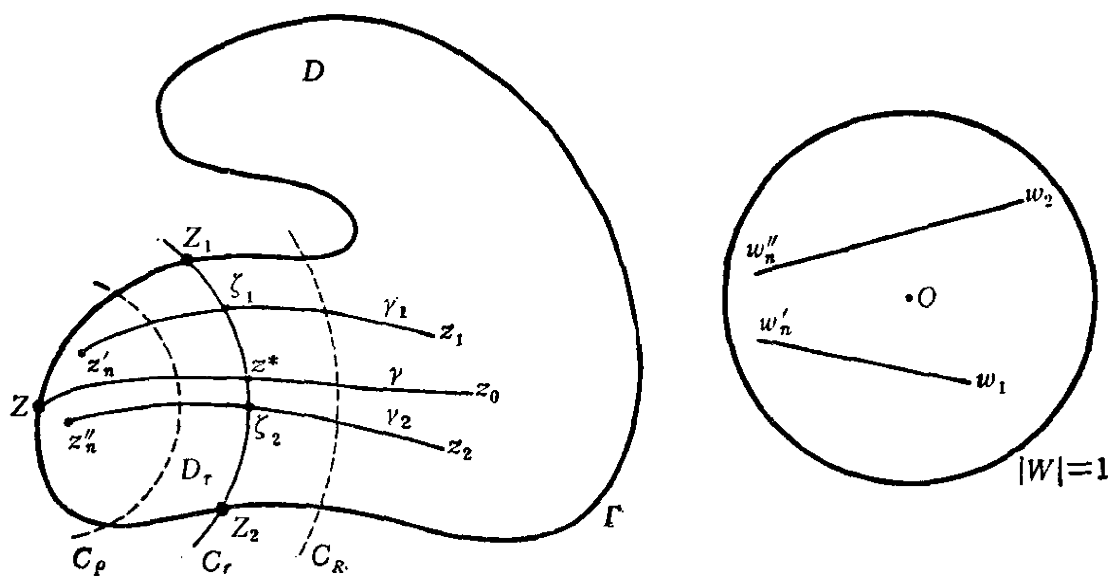


图 8-24

$$=\left|\int_{\theta_1}^{\theta_2} f'(Z+re^{i\theta})rie^{i\theta}d\theta\right|$$

$$\leqslant\int_{\theta_1}^{\theta_2} r|f'(Z+re^{i\theta})|d\theta.$$

由数学分析中的Schwarz不等式，

$$\frac{\varepsilon_0^2}{4}\leqslant\left\{\int_{\theta_1}^{\theta_2} r\,|f'(Z+re^{i\theta})|\,d\theta\right\}^2$$

$$\leqslant 2\pi\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2\,|f'(Z+re^{i\theta})|^2 d\theta,$$

即

$$\frac{\varepsilon_0^2}{4r}\leqslant 2\pi\int_{\theta_1}^{\theta_2} r\,|f'(Z+re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

不等式两边从ρ到R对r积分，得到

$$\frac{\varepsilon_0^2}{4}\log\frac{R}{\rho}\leqslant 2\pi\int_{\rho}^{R}dr\int_{\theta_1}^{\theta_2} r\,|f'(Z+re^{i\theta})|^2 d\theta$$

$$\leqslant 2\pi\iint_{D_R}|f'(z)|^2 d\sigma<2\pi^2.$$

所以

$$\frac{\varepsilon_0^2}{4}\log\frac{R}{\rho}<2\pi^2.$$

令$\rho\to 0$，左边趋于无穷，所以得到一矛盾．这便证明了$f(z)$在D内一致连续．

2）由于$f(z)$在D内一致连续，便可给出函数$f(z)$在边界Γ上的值．我们证明，若Z是Γ上的任意一点，则

$$\lim_{\substack{z\to Z\\ z\in D}} f(z)$$

存在且有穷．事实上，对于任意$\varepsilon>0$，因$f(z)$在D内一致连续，所以可得到一正数$\delta>0$，使得对于D内的任意两点z_1,z_2，只要$|z_1-z_2|<\delta$，就有

$$|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon.$$

因此，当$|z_1-Z|<\frac{\delta}{2}$，$|z_2-Z|<\frac{\delta}{2}$时，$|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon.$

根据Cauchy判别法，上述极限存在且有穷．

在边界Γ上，定义

$$f(Z)=\lim_{\substack{z\to Z\\ z\in D}} f(z).$$

设ε和δ是上述正数，而Z_1,Z_2是Γ上的两点，满足条件

$$|Z_1-Z_2|<\frac{\delta}{2}.$$

在D内取两点z_1,z_2，使得

$$|z_1-Z_1|<\frac{\delta}{4},\qquad |f(z_1)-f(Z_1)|<\frac{\varepsilon}{2};$$

$$|z_2-Z_2|<\frac{\delta}{4},\qquad |f(z_2)-f(Z_2)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

这时点z_1,z_2满足条件

$$|z_1-z_2|\leqslant|z_1-Z_1|+|Z_1-Z_2|+|Z_2-z_2|<\delta,$$

所以

$$|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon.$$

因此，当$|Z_1-Z_2|<\frac{\delta}{2}$时，

$$\begin{aligned}&|f(Z_1)-f(Z_2)|\\&\quad\leqslant|f(Z_1)-f(z_1)|+|f(z_1)-f(z_2)|\\&\qquad+|f(z_2)-f(Z_2)|\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = 2\varepsilon,$$

所以$f(Z)$在Γ上一致连续.由此可知$w = f(z)$在$\bar{D}$上一致连续.若Z是Γ上的一点，那么$W = f(Z)$必是圆周$|W| = 1$上的一点，因为若W是$|w|<1$內的一点，则$g(w)$把它映为D內的一点.

同理,函数$g(w)$在单位圆$|w|<1$內一致连续，对于圆周$|W| = 1$上的任意一点W，极限

$$\lim_{w\to W} g(w) \quad (|w|<1)$$

存在且有穷．然后，在圆周$|W| = 1$上定义

$$g(W) = \lim_{w\to W} g(w) \quad (|w|<1).$$

于是$g(w)$在$|w|\leqslant 1$上连续，且当W是圆周$|W| = 1$上的一点时，$Z = g(W)$是Γ上的一点．因为对于Γ上的点Z，对应的点$W = f(Z)$在单位圆周上．反之，和单位圆周上的点W相对应的点$Z = g(W)$在Γ上．所以Γ上的点与单位圆周上的点是一一对应的．定理证毕．

习　　题

1．设D和G是两个矩形.证明存在D到G的共形映照，使其D和G的顶点相互对应，其充要条件是D和G的对应边的边长成比例.

2．求下列域D在指定点z_0的映照半径：

(1) D：$|z|<R$，$z_0 = a$ $(|a|<R)$；

(2) D：$\mathrm{Im}z>0$，$z_0 = hi$ $(h>0)$.

3．设D是单连通域，$D\neq \mathbf{C}$，$z_0\in D$，d，k分别是z_0到D的边界点的最小距离和最大距离．证明

$$d\leqslant R\leqslant k,$$

其中R是D在点z_0的映照半径.

4. 设D是单连通域，$D \neq \mathbf{C}$，$z_0 \in D$，$f(z)$是 Riemann 存在定理中满足条件$f(z_0)=0$，$f'(z_0)>0$的函数．$g(z)$是任意一个把D保角地映为单位圆$|w|<1$的函数．试用$f(z)$表示出$g(z)$．

5. 设$f(z)$把单位圆$|z|<1$保角地映为域D，$a=f(z_0)$．证明D在点a的映照半径

$$R=(1-|z_0|^2)|f'(z_0)|.$$

6. 设D是有界域，其边界是一简单闭曲线Γ．若z_1,z_2,z_3是Γ上的三点，w_1,w_2,w_3是圆周$|w|=1$上的三点．它们均按正向排列，则存在唯一的一个函数$f(z)$，满足下列条件

(1) $f(z)$在D内单叶解析，将D保角地映为单位圆$|w|<1$；

(2) $f(z)$将z_1,z_2,z_3依次映为w_1,w_2,w_3．

7. （Vitali定理）设$f_n(z)$ $(n=1,2,3,\cdots)$是域D内解析函数序列，在D内闭一致有界．$f_n(z)$在点列$z_1,z_2,z_3,\cdots$上收敛，点列z_n $(n=1,2,3,\cdots)$有一个属于D的极限点．证明函数序列$f_n(z)$在D内闭一致收敛．

§5 多角形的共形映照．Schwarz-Christoffel公式

1. 一般的多角形

考虑z平面上的上半平面D与w平面上的n边的多角形P及其内部G，P的n个顶点按正向排列为$w_1,w_2,\cdots,w_n$，相应的n个顶角为$\lambda_1\pi,\lambda_2\pi,\cdots,\lambda_n\pi$ $(0<\lambda_k<2,\ k=1,2,\cdots,n)$．

首先，我们证明存在一个函数$f(z)$满足以下条件：

1) $f(z)$在D内单叶解析，将D保角地映为G；

2) $f(z)$在D内连续到边界实轴上，且建立起实轴上的点与P上的点的一个一一对应．

事实上，在D内取定一点a，作分式线性变换

$$\zeta=\frac{z-a}{z-\bar{a}},$$

这个分式线性变换在D内单叶解析，在$\overline{D}$上连续，且建立起实轴上的点与单位圆周$|\zeta|=1$上的点的一个一一对应．根据Riemann存在定理和边界对应定理，存在单叶解析函数$w=\varphi(\zeta)$把单位圆$|\zeta|<1$保角地映为G，$\varphi(\zeta)$连续到边界$|\zeta|=1$，并且建立起$|\zeta|=1$上的点与P上的点的一个一一对应．于是，复合函数

$$w=f(z)=\varphi\left(\frac{z-a}{z-\bar{a}}\right)$$

就满足条件 1),2)的要求（图8-25）.

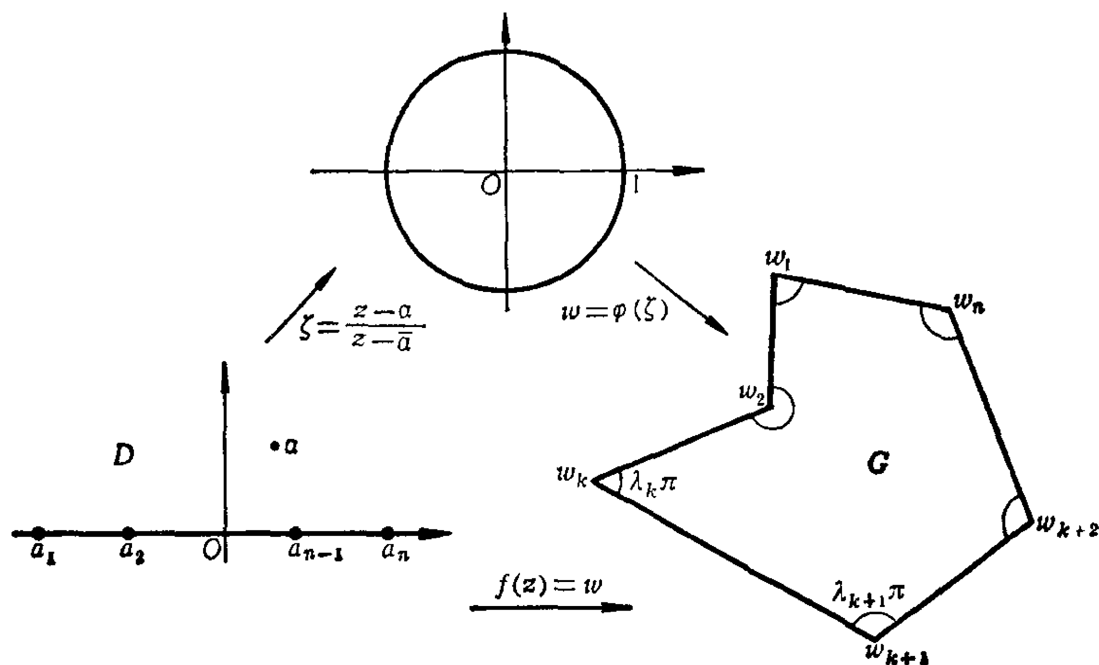


图 8-25

下面我们应用对称原理，求出函数$f(z)$的一般形式．

设实轴上与点w_1, w_2, $\cdots$, w_n相对应的n个点分别是$a_1,a_2,\cdots,a_n$．我们先假定这n个点都不是∞．又设S_k是实轴上的开线段(a_k,a_{k+1})，$k=1,2,\cdots,n-1$．$S_n=(a_n,a_1)$是由实轴上的两个开

线段$(a_n, +\infty)$和$(-\infty, a_1)$所组成．函数$f(z)$把S_k映为$P_k=(w_k, w_{k+1})$．由对称原理，$f(z)$可以越过S_k解析开拓到下半平面D'．即可以得到一个函数$F_k(z)$，它满足条件：1）$F_k(z)$在$D\cup D'\cup S_k$内解析；2）在D内，$F_k(z)=f(z)$，并且关于S_k对称的两点映为关于P_k对称的两点；3）$F_k(z)$在$D\cup D'\cup S_k$内的导数$F'_k(z)\neq 0$．这是因为$f(z)$在D内单叶，所以$F'_k(z)$在D内不为零．在D'内，$F_k(z)$也是单叶的，所以在D'内同样有$F'_k(z)\neq 0$．由于S_k上的每一点的邻域内$F_k(z)$是单叶的($F_k(z)$在整个$D\cup D'\cup S_k$内不一定是单叶的!)，故$F'_k(z)$在S_k上也不等于零．令$k=1,2,\cdots,n$，我们就得到n个函数$F_1(z), F_2(z),\cdots, F_n(z)$．它们在$D$内都等于$f(z)$，而在$D'$内是不相等的．不过，它们相邻的两个函数只相差一个线性变换．事实上，若z_0是D'内的任意一点，那么$\bar{z}_0\in D$．设

$$w^*=f(\bar{z}_0),\qquad w'_k=F_k(z_0),\qquad w'_{k+1}=F_{k+1}(z_0).$$

根据$F_k(z)$，$F_{k+1}(z)$在D'内的定义，w'_k, w^*两点关于P_k是对称的，w'_{k+1}, w^*两点关于P_{k+1}是对称的（图8-26）．因此，

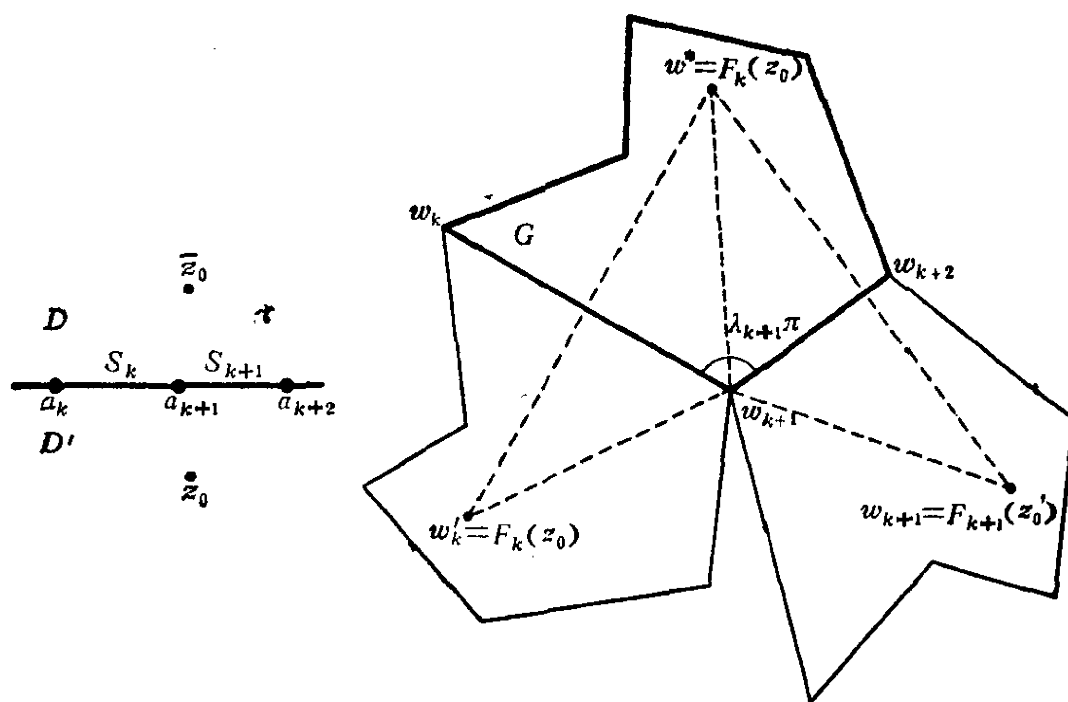


图 8-26

$$w'_k - w_{k+1} = e^{2\pi\lambda_{k+1}i}(w'_{k+1} - w_{k+1}),$$

即

$$F_k(z_0) - w_{k+1} = e^{2\pi\lambda_{k+1}i}(F_{k+1}(z_0) - w_{k+1}).$$

因为z_0是D'中的任意一点，所以在D'内，

$$F_k(z) = A_k F_{k+1}(z) + B_k,$$

其中A_k, B_k是与k有关的常数．由此得到

$$F'_k(z) = A_k F'_{k+1}(z), \quad z \in D',$$

$$F''_k(z) = A_k F''_{k+1}(z), \quad z \in D'.$$

所以

$$\frac{F''_k(z)}{F'_k(z)} = \frac{F''_{k+1}(z)}{F'_{k+1}(z)}, \quad z \in D'.$$

这就是说，这 n 个函数$F''_k(z)/F'_k(z)$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 在 D' 內是相等的，在D内，显然它们都等于$f''(z)/f'(z)$，即

$$\frac{F''_k(z)}{F'_k(z)} = \frac{f''(z)}{f'(z)}, \quad z \in D \ (k=1,2,\cdots,n).$$

因此，我们得到函数$g(z)$，它在整个有穷复平面上除去$a_1, a_2, \cdots, a_n$外是解析的，在D内

$$g(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)}.$$

下面我们证明$a_k(k=1,2,\cdots,n)$ 是$g(z)$的一级极点，$z=\infty$是$g(z)$的可去奇点．

设g_k是G内以w_k为顶点的扇形．在D内与g_k对应的是一个域d_k（图8-27）．d_k的边界有一段是实轴上的一线段S_k^*．$w=f(z)$将d_k保角地映为g_k，将 S_k^* 双方单值地映为g_k的两条边线，利用幂函数

$$\zeta = (w - w_k)^{1/\lambda_k}$$

（一个分支）把g_k保角地映为半圆ω_k；g_k 的边界上的点与ω_k的边界上的点一一对应（图8-28）．复合函数

$$\zeta = \psi_k(z) = \{f(z) - w_k\}^{1/\lambda_k}$$

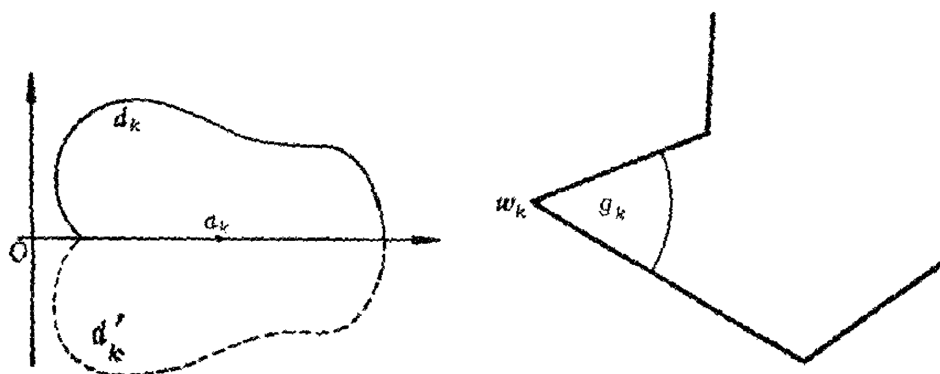


图 8-27

把d_k保角地映为ω_k，把S_k^*双方单值地映为ω_k的直径，把点a_k映为点$\zeta=0$．根据对称原理，我们可以将$\psi_k(z)$解析开拓到$d_k\cup d_k'\cup S_k^*$内，这个函数我们仍记作$\psi_k(z)$．它在$d_k\cup d_k'\cup S_k^*$内单叶解析，在以点a_k为圆心的小圆c_k内可展为 Taylor 级数

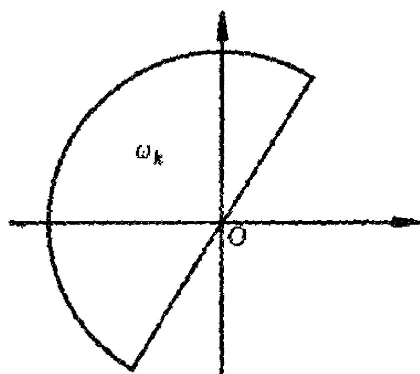


图 8-28

$$\psi_k(z)=A_1^{(k)}(z-a_k)+A_2^{(k)}(z-a_k)^2+\cdots,$$

$$A_1^{(k)}=\psi_k'(a_k)\neq 0.$$

$$\psi_k(z)=(z-a_k)\mu_k(z),$$

其中$\mu_k(z)$在c_k内解析，且$\mu_k(a_k)\neq 0$．我们不妨设在c_k内$\mu_k(z)\neq 0$，所以

$$f(z)-w_k=(\psi_k(z))^{\lambda_k}=(z-a)^{\lambda_k}\nu_k(z),$$

其中$\nu_k(z)=(\mu_k(z))^{\lambda_k}$(一个分支)在$c_k$内解析，且不等于零．由此得到

$$f'(z)=(z-a_k)^{\lambda_k-1}h_k(z),$$

其中$h_k(z)$在c_k内解析，且不等于零．于是

$$\frac{f''(z)}{f'(z)}=\frac{\lambda_k-1}{z-a_k}+\frac{h_k'(z)}{h_k(z)}.$$

由此可见，

$$g(z)=\frac{\lambda_k-1}{z-a_k}+\frac{h_k'(z)}{h_k(z)}$$

在C_k内除去a_k点外成立，a_k是$g(z)$的一级极点，$g(z)$ 在a_k邻域内 Laurent 展式的主要部分是$\frac{\lambda_k-1}{z-a_k}$.

现在考虑函数$g(z)$在点$z=\infty$邻域内的情形．由于$f(z)$在D内有界，所以$z=\infty$是$F_n(z)$的可去奇点．在$z=\infty$的邻域内，

$$F_n(z)=B_0+\frac{B_m}{z^m}+\frac{B_{m+1}}{z^{m+1}}+\cdots,\ B_m\neq0,$$

$$F_n'(z)=-\frac{mB_m}{z^{m+1}}-\frac{(m+1)B_{m+1}}{z^{m+2}}-\cdots=-\frac{1}{z^{m+1}}H(z),$$

其中$H(z)$在$z=\infty$邻域内解析，且$H(\infty)\neq0$．由此得到

$$F_n''(z)=\frac{m+1}{z^{m+2}}H(z)-\frac{1}{z^{m+1}}H'(z).$$

$$\frac{F_n''(z)}{F_n'(z)}=-\frac{m+1}{z}+\frac{H'(z)}{H(z)}.$$

所以$z=\infty$是$F_n''(z)/F_n'(z)$的一级零点．由于$z=\infty$的邻域内

$$g(z)=\frac{F_n''(z)}{F_n'(z)},$$

所以

$$\lim_{z\to\infty}g(z)=0.$$

现在考虑函数

$$G(z)=g(z)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k-1}{z-a_k}.$$

它在有穷复平面上除去点 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 外是解析的，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是它的可去奇点．此外，$G(\infty)=0$．所以$G(z)$恒为零，即

$$g(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k-1}{z-a_k}.$$

因为在上半平面内，$g(z)=\frac{f''(z)}{f'(z)}$，所以在$D$内，有

$$\frac{f''(z)}{f'(z)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k-1}{z-a_k}.$$

上式两边沿上半平面D内的任意一条从z_0到z的可求长曲线积分，得到

$$\log f'(z)=\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k-1)\log(z-a_k)+k,$$

其中对数是一些分支，k是常数．所以

$$f'(z)=C_1\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{\lambda_k-1},$$

$$f(z)=C_1\int_{z_0}^{z}\prod_{k=1}^{n}(\zeta-a_k)^{\lambda_k-1}d\zeta+C_2, \qquad (25)$$

其中C_1,C_2是两个常数，这个表达式称为Schwarz-Christoffel 公式．

推导Schwarz-Christoffel公式时我们是假定对应于多角形顶点w_k的那些点a_k是已知的．但是在具体问题中，往往是只给定多角形的顶点w_k，而a_k是未知的．我们可以任意给定x轴上的三个点，比如是$a_1<a_2<a_3$，使得它们分别与多角形的顶点w_1,w_2,w_3相对应，而其他点$a_4,a_5,\cdots,a_n$以及C_1,C_2要由具体问题的条件来确定．确切地说，存在唯一的一个单叶解析函数$w=f(z)$将上半平面D保角地映为多角形P的内部G，$f(z)$ 连续到边界(实轴)，建立起实轴与P之间的一一对应，且$w_k=f(z_k)$ $(k=1,2,3)$．

事实上，设$w=\psi(\zeta)$在上半平面 E 内单叶解析，将E保角地映为多角形P的内部G，将实轴上的三点$\zeta_1<\zeta_2<\zeta_3$依次映为P的三个顶点w_1,w_2,w_3. 由 §2 分式线性变换的性质，可以作一分式线性变换$\zeta=L(z)$，把a_1,a_2,a_3依次变为ζ_1,ζ_2,ζ_3. 于是复合函数

$$w=f(z)=\psi[L(z)]$$

把上半平面D保角地映为多角形P的内部G. 且$f(a_k)=w_k$ $(k=1,2,3)$ (图8-29).

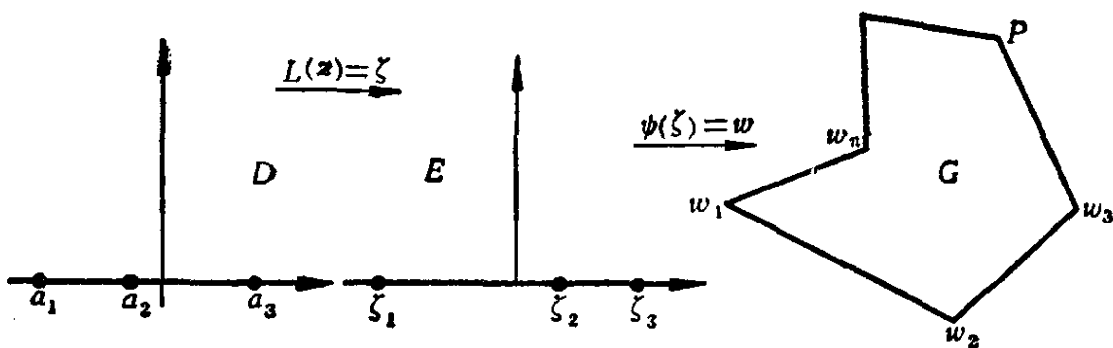


图 8-29

这个映照是唯一的. 如果$w=g(z)$也把D保角地映为 G，把实轴双方单值地映为 P，且 $g(a_k)=w_k(k=1,2,3)$，那么函数$L(z)=f^{-1}[g(z)]$把上半平面D保角地映为自身，且连续到边界（实轴）. 根据对称原理，$L(z)$可以解析开拓到整个z平面，由 §2 的定理 1，$L(z)$是一个分式线性变换. 另外，$L(z)$有三个不动点a_1,a_2,a_3. 所以$L(z)=z$，即$f(z)=g(z)$.

现在假定$a_1,a_2,\cdots,a_n$中有一个是无穷远点，比如$a_n=\infty$. 设$w=f(z)$将上半平面D保角地映为多角形P的内部 G，实轴上的点$a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$及$a_n=\infty$分别对应于点$w_1,w_2,\cdots,w_n$. 作分式线性变换

$$\zeta=\frac{1}{a-z},\quad a<a_1,$$

它把上半平面映为上半平面，实轴映为实轴，$a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}$，

$a_n=\infty$分别变为$\beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_{n-1}<\beta_n=0$.于是，函数

$$F(\zeta)=f\left(a-\frac{1}{\zeta}\right)$$

把上半平面保角地映为G，把β_k映为$w_k(k=1,2,\cdots,n)$．由(25)式，

$$F(\zeta)=C_1\int_{\zeta_0}^{\zeta}\{(\tau-\beta_1)^{\lambda_1-1}(\tau-\beta_2)^{\lambda_2-1}\cdots$$

$$\times(\tau-\beta_{n-1})^{\lambda_{n-1}-1}\tau^{\lambda_n-1}\}d\tau+C_2$$

$$f(z)=F\left(\frac{1}{a-z}\right)$$

$$=C_1\int_{\frac{1}{a-z_0}}^{\frac{1}{a-z}}\{(\tau-\beta_1)^{\lambda_1-1}(\tau-\beta_2)^{\lambda_2-1}\cdots$$

$$\times(\tau-\beta_{n-1})^{\lambda_{n-1}-1}\tau^{\lambda_n-1}\}d\tau+C_2$$

$$=C_1\int_{z_0}^{z}\left\{\left(\frac{1}{a-t}-\beta_1\right)^{\lambda_1-1}\left(\frac{1}{a-t}-\beta_2\right)^{\lambda_2-1}\cdots\right.$$

$$\times\left(\frac{1}{a-t}-\beta_{n-1}\right)^{\lambda_{n-1}-1}$$

$$\left.\times\left(\frac{1}{a-t}\right)^{\lambda_n-1}\right\}\frac{dt}{(a-t)^2}+C_2.$$

因为 $\beta_k=\dfrac{1}{a-a_k}$ $(k=1,2,\cdots,n-1)$，所以

$$f(z)=C_1'\int_{z_0}^{z}(t-a_1)^{\lambda_1-1}\cdots(t-a_{n-1})^{\lambda_{n-1}-1}$$

$$\times\frac{dt}{(a-t)^{(\lambda_1-1)+\cdots+(\lambda_n-1)+2}}+C_2.$$

又因为$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k = n-2$，所以

$$f(z) = C_1'\int_{z_0}^{z}(t-a_1)^{\lambda_1-1}(t-a_2)^{\lambda_2-1}\cdots$$

$$\times(t-a_{n-1})^{\lambda_{n-1}-1}dt + C_2 \qquad (26)$$

（26）式表明，如果$a_n=\infty$，那么Schwarz-Christoffel公式(25)中包含a_n的那个因子将不出现．

2． 三角形与矩形的情形

若P是一个三角形，它的顶点是w_1, w_2, w_3，相应的顶角是$\alpha\pi, \beta\pi, \gamma\pi$，$\alpha+\beta+\gamma=1$．在实轴上取三点：$a_1=0, a_2=1, a_3=\infty$．由公式(26)得到

$$w = f(z) = C_1\int_0^z \zeta^{\alpha-1}(1-\zeta)^{\beta-1}d\zeta + C_2. \qquad (27)$$

由$f(0)=w_1$，得到$C_2=w_1$．因为$f(1)=w_2$，所以

$$C_1 = \frac{w_2-w_1}{\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx} = \frac{w_2-w_1}{B(\alpha,\beta)}.$$

由于$\alpha+\beta+\gamma=1$，所以

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\gamma)}$$

$$= \frac{1}{\pi}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\sin\pi\gamma.$$

$$C_1 = \frac{\pi(w_2-w_1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\sin\pi\gamma}. \qquad (28)$$

若P是等边三角形，它的顶点$w_1=0, w_2=a, w_3=\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}a$

$(a>0)$，则$\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{1}{3}$，由(27)式得到

$$w=f(z)=C_1\int_0^z \zeta^{-\frac{2}{3}}(1-\zeta)^{-\frac{2}{3}}d\zeta,$$

其中

$$C_1=\frac{a\pi}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^3\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi a}{\sqrt{3}\left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^3}.$$

若P是等腰直角三角形，其顶点$w_1=0$，$w_2=a$，$w_3=a(1+i)$ $(a>0)$，则$\alpha=\gamma=\dfrac{1}{4}$，$\beta=\dfrac{1}{2}$，由(27)式得到

$$w=f(z)=C_1\int_0^z \zeta^{-\frac{3}{4}}(1-\zeta)^{-\frac{1}{2}}d\zeta,$$

其中

$$C_1=\frac{a\pi}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{a\sqrt{2\pi}}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}.$$

若P是具有$\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{3}$角的直角三角形，它的顶点为$w_1=0$，$w_2=a$，$w_3=a\left(1+\dfrac{i}{\sqrt{3}}\right)$ $(a>0)$，则$\alpha=1/6$，$\beta=1/2$，$\gamma=1/3$，由(27)式得到

$$w=f(z)=C_1\int_0^z \zeta^{-\frac{5}{6}}(1-\zeta)^{-\frac{1}{2}}d\zeta,$$

其中

$$C_1=\frac{a\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2a\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}\,\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}.$$

现在来讨论上半平面到矩形的共形映照．设D是z平面上的上半平面，G是w平面上的矩形P的内部（图8-30）．

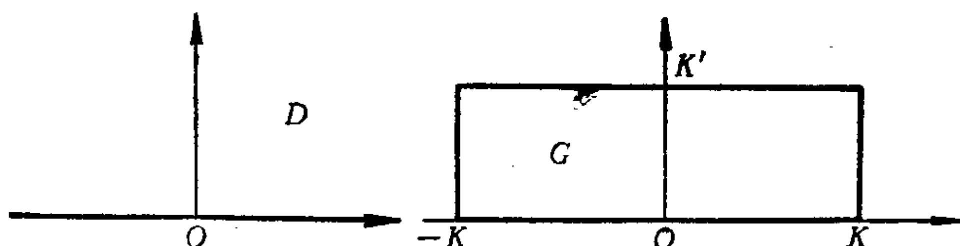


图 8-30

先考虑D内位于第一象限的那部分D_1与G内位于第一象限的那部分G_1．作变换$\zeta=z^2$，它把D_1保角地映为上半平面E，并且将点$z=0,1,\infty$依次变为点$\zeta=0,1,\infty$．已知存在一个E内的单叶解析函数$w=\varphi(\zeta)$，把E保角地映为G_1，使得点$\zeta=0,1,\infty$依次地变为点$w=0,K,iK'$．于是复合函数

$$w=f_1(z)=\varphi(z^2)$$

把D_1保角地映为G_1，把点$z=0,1,\infty$依次变为点$w=0,K,iK'$．并且$f_1(z)$连续到边界，建立起D_1的边界点与G的边界点的一一对应（图8-31）．设x轴上的一点$z=1/k$（$0<k<1$）对应于$w=K+iK'$．

y轴上的点与线段（$0,iK'$）的点一一对应．根据对称原理，$f_1(z)$可以越过y轴解析开拓到D在第二象限的那部分D_2内．确切地说，可以得到一个D内的单叶解析函数$f(z)$，在D_1内部，$f(z)=f_1(z)$，$f(z)$把D保角地映为域G，点$z=-\frac{1}{k},-1,1,\frac{1}{k}$分别变为点$-K+iK',-K,K,K+iK'$（图8-32）．根据Schwarz-Christoffel公式(25)得到

$$f(z)=C_1\int_0^z\frac{d\zeta}{\sqrt{\left(\zeta+\frac{1}{k}\right)(\zeta+1)(\zeta-1)\left(\zeta-\frac{1}{k}\right)}}+C_2$$

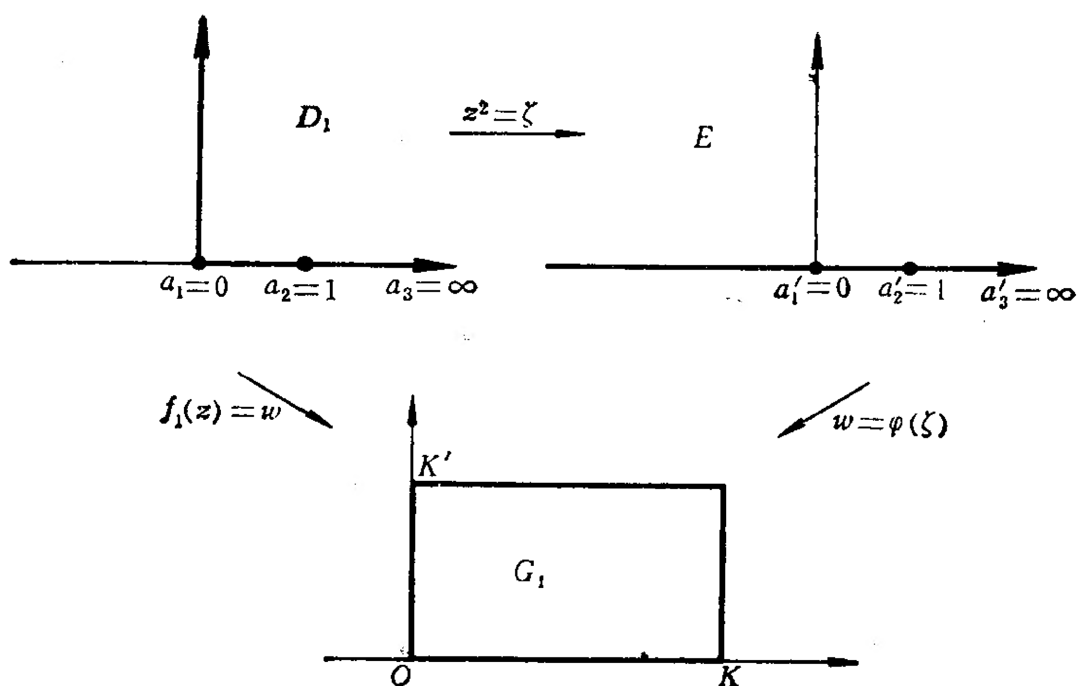


图 8-31

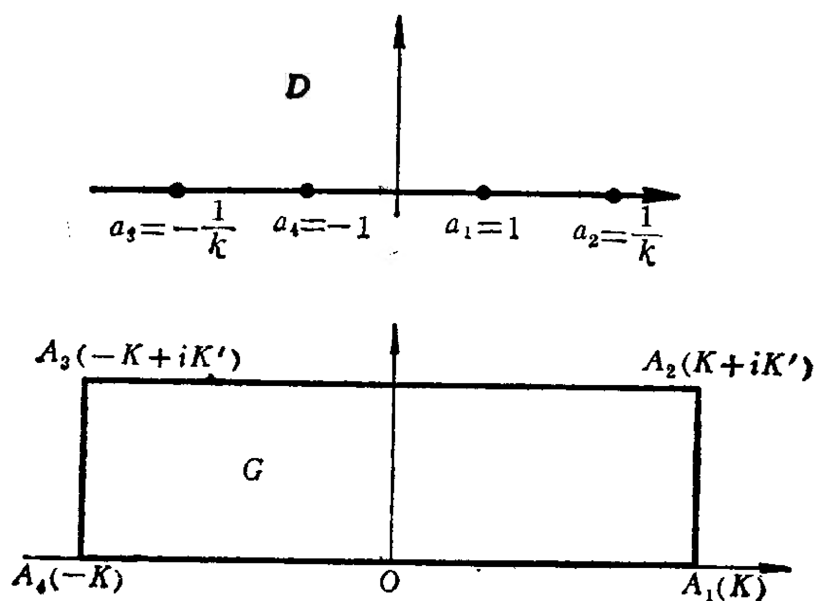


图 8-32

$\left(这里\ \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=\frac{1}{2}\right)$. 因为$f(0)=0$, 所以$C_2=0$,

$$f(z)=C\int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}. \tag{29}$$

又因为$f(1)=K$，所以

$$K=C\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

若记

$$F(k)=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}①,$$

那么

$$C=\frac{K}{F(k)}. \tag{30}$$

由于 $f\left(\frac{1}{k}\right)=K+iK'$，所以

$$K+iK'=C\int_0^{1/k}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=C\int_0^1+C\int_1^{1/k}$$

$$=K+iC\int_1^{1/k}\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}},$$

$$K'=C\int_1^{1/k}\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}.$$

在积分中作变换

$$t=\frac{1}{k_1}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}\qquad\left(x=\frac{1}{\sqrt{1-k_1{}^2t^2}}\right),$$

其中$k_1=\sqrt{1-k^2}$，我们得到

$$\int_1^{1/k}\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}=F(k_1),$$

$$K'=CF(k_1). \tag{31}$$

由(30),(31)式，得到

---

① 若令$x=\sin\theta$，那么$F(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$.

$$\frac{K'}{2K}=\frac{F(k_1)}{2F(k)}. \tag{32}$$

容易看出，$F(k)$是 k 的连续增函数，当 k 从 0 到 1 时，$F(k)$从 $\pi/2$增长到$+\infty$；$F(k_1)=F(\sqrt{1-k^2})$ 是k的连续减函数．于是 $F(k_1)/F(k)$是k的连续减函数(从$+\infty$到0)．因此当给定K与K'时，由(32)式可以唯一地确定 k 的值，然后再由(30)和(31)式确定C的值．

有时我们也设常数 k $(0<k<1)$ 是已经给定的，而选取矩形的长和宽使得(30)式与(31)式中的$C=1$，即

$$K=F(k)=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$K'=F(k_1)=\int_1^{1/k}\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}.$$

这时，函数

$$w=f(z)=\int_0^z\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} \tag{33}$$

把上半平面D保角地映为矩形的内部G．

习　　题

1．求上半平面到菱形（图8-33)的共形映照，使得$0,1,\infty$分别与菱形的顶点 $0,a,a(1+e^{i\alpha\pi})$ 相对应．

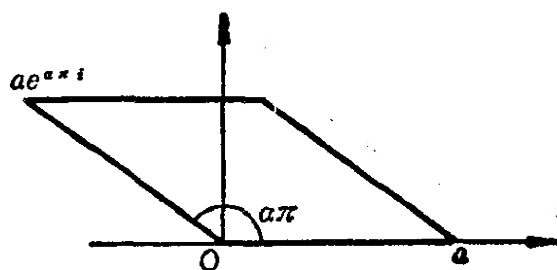


图 8-33

2．证明单位圆 $|z|<1$到多角形内部的共形映照有下列形式

$$f(z)=C_1\int_{z_0}^{z}(\zeta-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(\zeta-a_n)^{\alpha_n-1}d\zeta+C_2,$$

其中a_k（$|a_k|=1$）是与多角形顶点相对应的点，$\alpha_k\pi$ 是多角形的内角，$|z_0|\leqslant1$.

提示：利用上半平面到单位圆内的分式线性变换.

3. 设G是正多边形P的内部，P的中心在原点，$w=a$（$a>0$）是P的一个顶点，求单位圆$|z|<1$到G的共形映照$f(z)$，且使$f(0)=0$，$f'(0)>0$.

4. 设G是正五角星 P 的内部，P的中心在原点．$w=1$是P的一个顶点．求单位圆$|z|<1$到G的共形映照 $f(z)$，且使$f(0)=0$，$f'(0)>0$.